

Relación 3:. Formas Normales y Algoritmo DPLL.

Formas Normales

Ejercicio 65. Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decide si son equivalentes:

1. $A \rightarrow B \rightarrow C$ y $A \wedge B \rightarrow C$
2. $A \rightarrow (B \wedge \neg C)$ y $A \rightarrow B \rightarrow C$
3. $\neg(A \leftrightarrow B)$ y $A \leftrightarrow \neg B$

Ejercicio 66. Prueba las siguientes equivalencias:

1. $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
2. $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
3. $A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$
4. $A \wedge (B \rightarrow A) \equiv A$

Ejercicio 67. Para cada una de las siguientes fórmulas, determina si están en FNC, en FND, en ambas, o en ninguna de las dos.

$$\begin{array}{ll} (p \vee q) \wedge (r \vee \neg p) \wedge s & p \vee q \vee s \\ p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow s) & t \vee q \vee r \wedge s \end{array}$$

Ejercicio 68. Responde a las siguientes preguntas usando para ello formas normales:

1. ¿Es $(p \vee q \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow \neg r) \wedge \neg(\neg t \rightarrow q)$ satisfactible?
2. ¿Es $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg p)$ una tautología?
3. ¿ $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$?
4. ¿ $p \wedge q \rightarrow r \equiv q \rightarrow p \vee r$?

Ejercicio 69. Prueba las equivalencias:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B \equiv A \leftrightarrow (A \wedge B) & A \rightarrow B \equiv B \leftrightarrow (A \vee B) \\ A \wedge B \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \vee B) & A \leftrightarrow B \equiv (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B) \end{array}$$

Ejercicio 70. Para cada una de las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} F1 &\equiv \neg(p \leftrightarrow q \rightarrow r) \\ F2 &\equiv \neg(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \vee r) \\ F3 &\equiv (p \rightarrow r \vee s) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(p \rightarrow s) \end{aligned}$$

1. Calcula una FNC, decide si es o no una tautología y determina todos sus contramodelos.
2. Calcula una FND, decide si es o no satisfacible y determina todos sus modelos.

Ejercicio 71. Empleando la forma normal que consideres más adecuada, decide cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \leftrightarrow q, q \vee s\} \models s \rightarrow p$
2. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$

Ejercicio 72. Usando formas normales, decide si las siguientes fórmulas son o no tautologías y si son o no satisfacibles.

$$F1 \equiv p \rightarrow (p \vee p), \quad F2 \equiv (p \leftrightarrow q) \vee p, \quad F3 \equiv p \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow p, \quad F4 \equiv p \rightarrow r \vee q \rightarrow r \rightarrow r$$

Ejercicio 73. Para cada una de las siguientes fórmulas proposicionales, obtén una fórmula equivalente en FND y determina todos los modelos de la fórmula:

1. $(p \leftrightarrow q) \wedge r$
2. $((p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg((p \vee r) \wedge (q \vee r)))$
3. $\neg(p \wedge q \wedge r) \vee ((p \wedge q) \vee r)$

¿Cuáles de las fórmulas anteriores son satisfactibles? ¿Cuáles son tautologías?

Ejercicio 74. Una tabla de verdad para una fórmula proposicional F es la siguiente:

p	q	r	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1. Determina una FNC y una FND de la fórmula F .
2. Construye un circuito booleano con puertas NOT, OR y AND que calcule la función descrita en la tabla anterior.
3. Construye un circuito booleano que calcule la función descrita en la tabla anterior que sólo emplee puertas NOT y OR.

Algoritmo DPLL

Ejercicio 75. Alberto, Berta y Carlos son los tres sospechosos de un robo. Se les interroga por separado y éstas son sus declaraciones.

Alberto: Berta es culpable y Carlos es inocente.
 Berta: Si Alberto es culpable, Carlos también.
 Carlos: Yo soy inocente, pero al menos uno de los otros dos es culpable.

1. Formaliza las declaraciones de los sospechosos en el lenguaje de la lógica proposicional.
2. ¿Son consistentes los testimonios de los tres?
3. El testimonio de un sospechoso se sigue lógicamente de los de los otros dos. ¿Cuál?
4. Se sabe que todos los culpables han mentido y todos los inocentes han dicho la verdad. ¿Quién es inocente y quién es culpable?

Ejercicio 76. Consideremos el conjunto de fórmulas

$$U = \{r \leftrightarrow p \vee q, s \rightarrow p, \neg s \wedge \neg r \rightarrow s \vee t\}.$$

1. Obtener una forma clausal de U .
2. Pruébese utilizando el algoritmo DPLL que $U \not\models p$. ¿Qué modelo nos proporciona el algoritmo?
3. Pruébese, mediante DPLL, que $U \models \neg p \rightarrow (q \vee t)$.
4. Pruébese, usando los apartados 2. y 3., que $U \not\models \neg q \wedge \neg t$.

Ejercicio 77. Sea S el siguiente conjunto de fórmulas proposicionales:

$$\{p \vee q \rightarrow m, m \wedge (s \vee r) \rightarrow u, u \wedge w \rightarrow j, u \wedge r \rightarrow v, p \wedge s \wedge r \rightarrow v, \neg v\}$$

Decide, usando el algoritmo DPLL, si S es consistente. Y en caso de que lo sea, explica el modelo que se encuentra al aplicar el algoritmo.

Ejercicio 78. Sean $S = \{p \rightarrow q, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q, q \leftrightarrow r \wedge s\}$. Obtener todos los modelos de S por medio de DPLL.

Ejercicio 79. Decide, usando el algoritmo DPLL, si el siguiente conjunto de cláusula, S , es satisfactible. Y en caso de que lo sea, explicita el modelo que se encuentra al aplicar el algoritmo.

$$\begin{array}{l}
 1.- \quad p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee \neg t \\
 2.- \quad p \vee \qquad \qquad r \vee s \vee t \\
 3.- \quad p \vee \qquad \qquad \neg r \vee s \\
 4.- \quad p \vee \qquad \qquad r \vee \neg s \vee t \\
 5.- \quad p \vee \qquad \qquad \neg r \vee \neg s \\
 6.- \quad \neg p \vee \neg q \\
 7.- \qquad \qquad \neg q \vee r \vee s \vee \neg t \\
 8.- \qquad \qquad \qquad s \vee \neg t
 \end{array}$$

Ejercicio 80. Probar la corrección del siguiente argumento utilizando el algoritmo DPLL:

1. *Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.*
2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*
3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*
4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 81. Formaliza los siguientes argumentos y estudia su validez haciendo uso de DPLL:

1. Si llueve las calles están vacías. Si las calles están vacías, los comercios obtienen pérdidas. Los músicos no podrían sobrevivir si los comerciantes no les contratasen para componer canciones para publicidad. Los comerciantes invierten en canciones publicitarias cuando tienen pérdidas. Por tanto, si llueve los músicos pueden sobrevivir.
2. Si el barco entra en el puerto, habrá una gran fiesta. El barco entra en el puerto sólo si necesita repostar combustible. El barco no necesita combustible a menos que venga de muy lejos. Es imposible que no necesite combustible si la comida ya se les ha terminado. Sabemos que, o bien se le ha terminado la comida, o bien necesita combustible. Por tanto: habrá una gran fiesta.
3. Si f es diferenciable en $[a, b]$, es continua y acotada en $[a, b]$. Si f no fuese acotada en $[a, b]$ no podrá ser diferenciable en $[a, b]$. Por tanto: si f es discontinua y acotada en $[a, b]$ no es diferenciable en $[a, b]$.
4. Si llueve no iré al mercado. Si no iré al mercado, o bien no tendré comida o bien iré al restaurante. Llueve y tengo comida. Por lo tanto, no iré al restaurante.

Ejercicio 82. Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus *Pokemon*. Se conocen los siguientes datos al respecto:

- a) Uno, y sólo uno, de los siguientes *Pokemon* fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.
- b) Ash ganó la batalla si el *Pokemon* vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.
- c) Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.
- d) Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.
- e) Si Onix fue derrotado, Starmie también.
- f) Bulbasaur fue derrotado.
- g) Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.
- h) Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.
- i) Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.

Utiliza el algoritmo DPLL para probar que Ash fue el ganador.

Ejercicio 83. Las guerras clon han comenzado. Durante el transcurso de una refriega, tres caballeros Jedi, Anakin, Obi Wan y Yoda, se encuentran con el conde Dooku. Utilizaremos el lenguaje proposicional A, O, Y para denotar que el correspondiente caballero participa en el combate, y G para denotar los Jedi han ganado.

1. Formaliza las siguientes afirmaciones:

F_1 : Para derrotar al conde Dooku deben participar al menos dos caballeros Jedi.

F_2 : El Conde Dooku gana cuando sólo participa un caballero.

F_3 : Si el Conde Dooku pierde entonces Anakin ha participado en el combate.

F_4 : Si el Conde Dooku pierde, entonces no han participado los tres caballeros.

2. ¿Es cierto que $\{F_1, F_2, F_3\} \models G \rightarrow A \wedge O$? Razónese formalmente la respuesta.