Lógica Informática. (Tecnologías Informáticas) 22 de noviembre de 2022

Relación 5: Resolución.

Resolución proposicional

Ejercicio 95. Decide en cuáles de los siguientes ejemplos se ha aplicado correctamente la regla de resolución proposicional y en cuáles no y si es posible, escribe las resolventes correctas.

1. $\{p, q, r\}$ Hipótesis 2. $\{p, q, s\}$ Hipótesis 3. $\{p, q, r, s\}$ Resolvente de 1 y 2		1. $\{p, \neg q\}$ Hipótesis 2. $\{\neg q\}$ Hipótesis 3. $\{p\}$ Resolvente de 1 y 2	
1. $\{p, \neg q, \neg r\}$ Hipótesis 2. $\{\neg p, q, r\}$ Hipótesis 3. $\square$ Resolvente de 1 y 2		1. $\{r, \neg r\}$ Hipótesis 2. $\{r, \neg r\}$ Resolvente de 1 y 1	

Ejercicio 96. Usando resolución por saturación y regular (y pasando previamente las fórmulas a forma clausal), demuestra que:

1. $(p \leftrightarrow q \rightarrow r) \land (p \leftrightarrow q) \land (p \rightarrow \neg r)$ es una contradicción.
2. $\{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p \land r\} \models p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$.

Ejercicio 97. Usando resolución regular, determina la consistencia de:

(1) $\{p \lor \neg q,\ p \lor q,\ \neg p \lor \neg q,\ \neg p \lor q\}$ **(2)** $\{\neg r,\ q,\ p \lor \neg q,\ \neg p \lor r\}$
(3) $\{p \lor q \lor r,\ \neg p \lor q,\ \neg q \lor r,\ \neg r,\ p \lor r\}$ **(4)** $\{p,\ \neg p \lor q,\ r\}$

Ejercicio 98. Demuestra, utilizando resolución por entradas, la inconsistencia del conjunto de cláusulas $\{\neg p \lor \neg q \lor r,\ \neg s \lor t,\ \neg t \lor p,\ s,\ \neg s \lor u,\ \neg u \lor q,\ \neg r\}$.

Ejercicio 99. Determina la inconsistencia del conjunto

$$\{p \lor q,\ q \lor r,\ r \lor w,\ \neg r \lor \neg p,\ \neg w \lor \neg q,\ \neg q \lor \neg r\}$$

mediante (1) resolución lineal, (2) resolución positiva, y (3) resolución negativa.

Ejercicio 100. Demostrar o refutar los siguientes asertos:

1. Existen cláusulas C_1,C_2 y D tales que D es una resolvente de C_1 y C_2, $D \subsetneq C_1$ y $D \neq C_1$.
2. Existen cláusulas C_1, C_2 y D tales que D es una resolvente de C_1 y C_2 y $D = C_1$.
3. Existen cláusulas C_1, C_2 y D tales que D es una resolvente de C_1 y C_2, $C_1 \subsetneq D$ y C_2 no es una tautología.

Ejercicio 101. Determina la inconsistencia del conjunto

$$\{\neg A \lor \neg B \lor C,\ \neg A \lor \neg G \lor H,\ \neg A \lor \neg H \lor F,\ \neg G \lor B,\ G,\ A,\ \neg F\}$$

mediante (1) resolución lineal, (2) resolución positiva, (3) resolución negativa, (4) resolución por entradas, y (5) resolución unidad.

Ejercicio 102. Decide usando resolución la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\{p \to (q \to r),\ r \to q\} \models r \leftrightarrow q$
2. $\{p \to q,\ q \to (p \land q), p \to r\} \models q \to r$

Ejercicio 103. Sea A la fórmula proposicional

$$(p \lor q \leftrightarrow \neg r) \land (\neg p \to s) \land (\neg t \to q) \land (s \land t \to u)$$

1. Prueba que A es satisfactible.
2. Prueba por resolución proposicional que

$$\{p \lor q \leftrightarrow \neg r,\ \neg p \to s,\ \neg t \to q,\ s \land t \to u\} \models r \to u$$

Ejercicio 104. Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus *Pokemon*. Se conocen los siguientes datos al respecto:

a) *Uno, y sólo uno, de los siguientes Pokemon fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.*

b) *Ash ganó la batalla si el Pokemon vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.*

c) *Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.*

d) *Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.*

e) *Si Onix fue derrotado, Starmie también.*

f) *Bulbasaur fue derrotado.*

g) *Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.*

h) *Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.*

i) *Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.*

1. Formaliza los datos anteriores en el lenguaje de la lógica proposicional.
2. Para cada fórmula obtenida, escribe un conjunto de cláusulas equivalente.
3. Usando resolución proposicional, demuestra que Ash fue el ganador.

Resolución en primer orden

Ejercicio 105. Sea Σ el conjunto de fórmulas (donde a y b son símbolos de constante):

$$\{\forall x\,(P(x,f(x)) \to \neg P(x,b)), \forall x\,(P(x,a) \to P(x,b)), \forall x\,(\neg\exists z\,P(x,z) \vee P(x,f(x)))\}$$

Decide, mediante resolución, si:

1. $\Sigma \models \neg\exists x\,\exists z\,(P(x,z) \wedge P(x,a))$
2. $\Sigma \models P(x,z) \wedge P(x,a)$

Ejercicio 106. Determina si existe una refutación a partir de los siguientes conjuntos de cláusulas, y si no es posible, justifícalo:

(a) $\{p(x,x),\ \neg p(x,f(x)),\ p(x,f(x)) \vee \neg p(f(x),y),\ p(x,y) \vee \neg p(x,z) \vee \neg p(y,z)\}$

(b) $\{p(x,x),\ \neg p(x,f(x)),\ p(x,f(x)) \vee \neg p(f(x),y),\ \neg p(x,y) \vee p(x,z) \vee p(y,z)\}$

Ejercicio 107. Sea $\Gamma = \{p(x,0,x), p(x,y,z) \to p(x,s(y),s(z))\}$. Utilizando resolución, prueba que:

1. $\Gamma \models p(s(s(0)), s(0), s(s(s(0))))$.
2. $\Gamma \not\models p(0,x,x)$.

Ejercicio 108. Sea Σ el conjunto formado por las siguientes fórmulas:

(1) $P(\mathbf{a}) \wedge \forall x\,(P(x) \to Q(f(x),x))$	**(3)** $\forall x\,(P(x) \vee R(x))$
(2) $Q(x,y) \to [R(f(x)) \wedge \neg R(f(f(x)))]$	**(4)** $\forall x \neg(P(x) \wedge R(x))$

Se pide:

1. Prueba mediante resolución que $\Sigma \models P(f(f(f(\mathbf{a}))))$.
2. Prueba, utilizando el teorema de Herbrand, que $\Sigma \not\models Q(f(x),x) \to P(x)$.
3. Prueba, por inducción en n, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma \models R(f^{3n+2}(\mathbf{a})) \wedge P(f^{3n}(\mathbf{a}))$.

Ejercicio 109. Aplica el algoritmo de unificación a los siguientes conjuntos:

(1)	$\{p(x,y), p(y,f(z))\}$	**(4)**	$\{p(x,g(x),y), p(z,u,g(u))\}$
(2)	$\{p(c,y,f(y)), p(z,z,u)\}$	**(5)**	$\{p(g(x),y), p(y,y), p(u,f(w))\}$
(3)	$\{p(x,g(x)), p(y,y)\}$	**(6)**	$\{p(x,f(y),z), p(g(w),u,g(w)), p(v,v,g(w)\}$

Ejercicio 110. Encuentra, si existe, un unificador para cada conjunto de expresiones (como siempre, las últimas letras del alfabeto son símbolos de variables y las primeras, de constantes):

(1)	$\{P(x,z,y), P(w,u,w), P(a,u,u)\}$	**(5)**	$\{P(f(x,x),a), P(f(y,f(y,a)),a)\}$
(2)	$\{\neg P(a), P(x)\}$	**(6)**	$\{P(f(a),x), P(x,a)\}$
(3)	$\{P(f(f(x)),z),\ P(f(u),f(v))\}$	**(7)**	$\{P(f(x),x), P(u,f(u))\}$
(4)	$\{Q(f(x),a,y),\ Q(u,f(v),b)\}$	**(8)**	$\{Q(f(x),y,z),\ Q(f(u),a,f(a))\}$

Ejercicio 111. Sean t_1 y t_2 dos términos. Diremos que t_1 es más general que t_2 si existe una sustitución θ tal que $t_2 = t_1\theta$. Decide, en los siguientes casos, si el primer término es más general que el segundo:

(1)	$x, f(x,y)$	**(2)**	$h(h(x,y),x), h(z,x)$	**(3)**	$f(g(y),y), f(g(x),a)$.
(4)	$h(x,y), h(g(y),y)$	**(5)**	$f(x,x), f(x,y)$.		

Ejercicio 112. Determina, por resolución, la validez de las fórmulas:

1. $\exists x\,[[P(x) \to P(a)] \wedge [P(x) \to P(b)]]$
2. $\forall z\,[Q(z) \to P(z)] \to [\exists x\,[Q(x) \to P(a)] \wedge [Q(x) \to P(b)]]$
3. $\exists x\,\exists y\,[[P(f(x)) \wedge Q(f(b))] \to [P(f(a)) \wedge P(y) \wedge Q(y)]]$
4. $\exists x\,\forall y\,P(x,y) \to \forall y\,\exists x\,P(x,y)$
5. $\forall x\,[P(x) \wedge [Q(a) \vee Q(b)]] \to \exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$

Ejercicio 113. **Decide** la consistencia de los conjuntos de cláusulas (en lógica predicativa):

1. $\{Q(u) \vee P(a),\ \neg Q(w) \vee P(w),\ \neg Q(x) \vee \neg P(x)\}$
2. $\{Q(u) \vee P(a),\ \neg Q(w) \vee P(w),\ \neg Q(x) \vee \neg P(x),\ Q(y) \vee \neg P(y)\}$
3. $\{I(a),\ \neg R(x) \vee L(x),\ \neg D(y) \vee \neg L(y),\ D(a)\}$
4. $\{I(a),\ \neg R(x) \vee L(x),\ \neg D(y) \vee \neg L(y),\ D(a),\ \neg I(z) \vee R(z)\}$
5. $\{\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee P(x,z),\ P(a,x),\ P(x,b),\ P(x,f(x)\}$

Ejercicio 114. Estudia la consistencia de

$$\{M(a,s(c),s(b)),\ P(a),\ M(x,x,s(x)),\ \neg M(x,y,z) \vee D(x,z),$$
$$\neg P(x) \vee \neg M(y,z,u) \vee \neg D(x,u) \vee D(x,y),\ \neg D(a,b)\}$$

Ejercicio 115. Decide la validez de los siguientes asertos sobre consecuencia lógica:

1. $\{\forall x[P(x) \to \exists y[R(y) \wedge Q(x,y)]],\ \exists x[P(x)]\} \models \exists x\, \exists y\, Q(x,y)$
2. $\{\neg A(x) \vee F(x) \vee G(f(x)),\ \neg F(x) \vee B(x),\ \neg F(x) \vee C(x),\ \neg G(x) \vee B(x),$
   $\neg G(x) \vee D(x),\ A(g(x)) \vee F(h(x))\} \models \exists x\, \exists y\, [[B(x) \wedge C(x)] \vee [D(y) \wedge B(y)]]$
3. $\{\exists x\, \forall y\, \neg P(y,x),\ \forall z\, \exists y\, \forall x\, [P(x,y) \leftrightarrow [P(x,z) \wedge \neg P(x,y)]]\} \models \forall x\, \forall y\, \neg P(y,x)$
4. $\{\exists x\, \forall y\, P(x,y),\ \forall x\, \forall y\, [P(x,y) \to \neg P(y,x)]\} \models \forall x\, \exists y\, P(x,y)$
5. $\{\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w\, [P(x,y,u) \wedge P(y,z,v) \wedge P(x,v,w) \to P(u,z,w)],$
   $\forall x \forall y \exists z\, P(z,x,y),\ \forall x \forall y \exists z\, P(x,z,y)\} \models \exists x \forall y\, P(y,x,y)$

Ejercicio 116. Sabemos que

1. Existen pacientes a quienes les gustan todos los médicos.
2. A ningún paciente le gusta ningún curandero

Con los predicados $P(x)$ = "x es un paciente", $M(x)$ = "x es un médico", $C(x)$ = "x es un curandero", y $G(x,y)$ = "a x le gusta y", expresar los conocimientos anteriores en forma de cláusulas y, por resolución, demostrar que ningún médico es curandero.

Ejercicio 117. Sabemos que:

1. Los aficionados a la música son cultos.
2. A algunos cultos les gusta el fútbol.
3. Los aficionados a todo no son cultos.
4. Los aficionados al fútbol, pero no a la música, no son cultos.

Con los predicados $AF(x,y)$ = "x es aficionado a y" y $CU(x)$ = "x es culto", prueba por resolución que hay a quien le gusta la música y el fútbol.

Ejercicio 118. Sabemos que

1. Todos los pasajeros que no eran VIP's fueron registrados por algún aduanero.
2. Algunos pasajeros eran narcotraficantes, y fueron registrados sólo por narcotraficantes.
3. Ningún narcotraficante era VIP.

Con los predicados $P(x)$ = "x es pasajero", $V(x)$ = "x es VIP", $A(x)$ = "x es aduanero", $N(x)$ = "x es narcotraficante", y $R(x,y)$ = "x es registrado por y", expresa el conocimiento en forma de cláusulas y, por resolución, demuestra que algún aduanero es narcotraficante.

Ejercicio 119. Sabemos que:

1. Pepe tiene dinero: $DI(Pepe)$.
2. La librería Lib tiene el libro Sistemas Expertos: $TL(Lib, SE)$.
3. Pepe quiere ese libro: $Q(Pepe, SE)$.
4. Si una librería L envía el libro l a un cliente c, $ENV(L, l, c)$, entonces el cliente recibe el libro: $R(c, l)$.
5. Si una librería L tiene un libro l, y un cliente c le envía un cheque, $CH(c, L)$, entonces la librería L envía el libro l al cliente c.
6. Si un cliente quiere un libro, y tiene dinero, entonces puede enviar un cheque a una librería.

Expresa estos conocimientos en forma de cláusulas y, por resolución, determinar si Pepe recibirá el libro Sistemas Expertos.

Ejercicio 120. Sabemos que

1. Marco era pompeyano.
2. Todos los pompeyanos eran romanos.
3. Cada romano, o era leal a César, o le odiaba.
4. Todo el mundo es leal a alguien.
5. La gente sólo intenta asesinar a quienes no es leal.
6. Marco intentó asesinar a César.

Usando los predicados $P(x)$ = "x es pompeyano", $R(x)$ = "x es romano", $L(x, y)$ = "x es leal a y", $O(x, y)$ = "x odia a y", y $IA(x, y)$ = "x intentó asesinar a y", formaliza el conocimiento anterior y, por resolución, responde a las preguntas: ¿Era leal Marco a César? ¿Odiaba Marco a César?

Ejercicio 121. Sabemos acerca de los gustos de dos personajes famosos lo siguiente:

1. Silvestre y Garfield son gatos.
2. A todos los gatos les gusta el queso o los ratones.
3. A nadie a quien le guste el queso, le gusta el vino.
4. A quienes les gustan los ratones, les gusta la cerveza.
5. A Garfield no le gusta lo que le gusta a Silvestre.
6. A Silvestre le gusta el vino y la cerveza.

Se pide:

(a) Formaliza los enunciados anteriores en lenguaje de primer orden utilizando:

- **a**, **b**, **c**, **d**, como constantes para queso, ratones, vino y cerveza, respectivamente.
- **SIL** y **GAR** como constantes para Silvestre y Garfield, respectivamente.
- Los predicados: $G(x)$: "x es un gato", $GU(x, y)$: "a x le gusta y".

(b) Obtén una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado anterior.

(c) Prueba mediante resolución que a Garfield le gusta el queso y no le gusta el vino.

Ejercicio 122. Demostrar mediante resolución que el siguiente argumento es correcto:

Quien intente entrar en un país y no tenga pasaporte, encontrará algún aduanero que le impida el paso. A algunas personas motorizadas que intentan entrar en un país le impiden el paso únicamente personas motorizadas. Ninguna persona motorizada tiene pasaporte. Por tanto, ciertos aduaneros están motorizados.

Ejercicio 123. Se conocen los siguientes hechos:

1. Todos los ordenadores son máquinas.
2. El TX-150 es un ordenador.
3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.
4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.
5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.
6. El TX-150 desespera a Félix.
7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

Se pide:

(a) Formaliza los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado:

$O(x)$: "x es un ordenador", $M(x)$: "x es una máquina", $A(x, y)$: "x puede arreglar y", $E(x, y)$: "x estropea y" y $D(x, y)$: "x desespera a y".

Y **a**, **b** como constantes para TX-150 y Félix, respectivamente.

(b) Utilizando resolución no restringida responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX-150? ¿Estropea Félix el TX-150?