Introducción

Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal

Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Tema 3:
Formas Normales y Algoritmo DPLL

Dpto. Ciencias de la Computación Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica Informática
(Tecnologías Informáticas)

Contenido

Introducción

Formas normales
- Equivalencia lógica
  - Sustitución
- Formas normales
- Algoritmos para SAT y TAUT
- Tablero y Formas Normales
- Forma clausal

Algoritmo DPLL
- Estructura del algoritmo
- Extracción de Modelos

Introducción

- En este tema presentaremos mecanismos para transformar las fórmulas de las lógicas estudiadas y conseguir expresiones *equivalentes* que muestran algunas ventajas para aplicar algoritmos.
- Comenzaremos dando procedimientos para transformar fórmulas proposicionales.
- Y daremos un algoritmo para decidir SAT que es la base de la mayoría de algoritmos modernos para ese problema.

Formas Normales en LP

- Comenzaremos dando una visión *algebraica* de las fórmulas proposicionales.
- Si identificamos cada conectiva con su función de verdad, entonces cada fórmula proposicional F, que contenga sólo las variables proposicionales $p_1, \ldots, p_n$, puede considerarse una expresión algebraica (similar a un polinomio), que define una función booleana $H_F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.
- Estas expresiones algebraicas pueden manipularse de manera similar al modo en que reescribimos una expresión aritmética para simplificarla.
- Con estos procedimientos conseguiremos dar dos formas simples para cada fórmula: la *Forma Normal Conjuntiva* (FNC) y la *Forma Normal Disyuntiva* (FND).
- Pero antes debemos explicitar qué entendemos por **fórmulas equivalentes**.

Equivalencia lógica en LP

Definición.
Dos fórmulas F_1, F_2 son **equivalentes** ($F_1 \equiv F_2$) si, para toda valoración v, se tiene que $v(F_1) = v(F_2)$.

Es fácil comprobar que:

- $F_1 \equiv F_2$ si F_1 y F_2 tienen los mismos modelos.
- $F_1 \equiv F_2$ si y sólo si $F_1 \models F_2$ y $F_2 \models F_1$

Ejemplos:

- $F \notin SAT$, $G \notin SAT$, entonces $F \equiv G$.
- $F \in TAUT$, $G \in TAUT$, entonces $F \equiv G$.

Equivalencias (I)

Sean A, $B \in PROP$. Se tienen las siguientes equivalencias:

- **Conmutatividad**:

$$A \vee B \equiv B \vee A$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

- **Asociatividad**:

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$

- **Distributividad**:

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

- **Doble negación**:

$$\neg\neg A \equiv A$$

- **Leyes de De Morgan**:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

Equivalencias (II)

- **Idempotencia**:

$$A \vee A \equiv A$$
$$A \wedge A \equiv A$$

- **Absorción**:

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$
$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

- **Leyes de tautología**: Si A es una tautología, entonces

$$A \wedge B \equiv B$$
$$A \vee B \equiv A$$

- **Leyes de inconsistentes**: Si A es insatisfactible, entonces

$$A \wedge B \equiv A$$
$$A \vee B \equiv B$$

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Sustitución

- Dadas $A, A', B \in PROP$ si A es una subfórmula de B, la sustitución de A por A' en B es la fórmula que se obtiene al cambiar cada aparición de A en B por A'.
  - Notación: $B_{\{A/A'\}}$.
  - Si A no es una subfórmula de B, por definición $B_{\{A/A'\}}$ es B.
- $B = p \to (q \wedge r) \vee \neg s$, $A = q \wedge r$, $A' = t \to \neg r$

$$\overbrace{p \to \underbrace{(q \wedge r)}_{A} \vee \neg s}^{B} \qquad \overbrace{p \to \underbrace{(t \to \neg r)}_{A'} \vee \neg s}^{B_{\{A/A'\}}}$$

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Sustitución: ejemplos

Si $B = p \rightarrow q \rightarrow r \vee s$ entonces:

- $B_{\{r \vee s/p\}} = \quad p \rightarrow q \rightarrow p.$
- $B_{\{q \wedge r/q\}} = \quad p \rightarrow q \rightarrow r \vee s.$
- $B_{\{q \rightarrow r \vee s/p \wedge r\}} = \quad p \rightarrow p \wedge r.$
- $B_{\{p \rightarrow q/p\}} = \quad p \rightarrow q \rightarrow r \vee s.$

Si $C = (p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p \rightarrow q)$, entonces:

- $C_{\{p \rightarrow q/t\}} = \quad t \vee (r \rightarrow t).$
- $C_{\{p \rightarrow q/t \rightarrow p \rightarrow q\}} = (t \rightarrow p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow (t \rightarrow p \rightarrow q)).$

Formas Normales y Algoritmo DPLL

Introducción

Formas normales

Equivalencia lógica

Sustitución

Formas normales

Algoritmos para SAT y TAUT

Tablero y Formas Normales

Forma clausal

Algoritmo DPLL

Estructura del algoritmo

Extracción de Modelos

El Teorema de Sustitución

Teorema de Sustitución. Si $A, A', B \in PROP$ y $A \equiv A'$ entonces $B_{\{A/A'\}} \equiv B$.

- Este teorema permite manipular "algebraicamente" una fórmula para obtener otra fórmula más simple y equivalente a ella. Este proceso es similar al empleado en la simplificación de expresiones algebraicas.
- **Ejemplo:**

$$
\begin{array}{rcl}
B \vee (A \wedge (A \rightarrow B)) & \equiv & B \vee (A \wedge (\neg A \vee B)) \\
 & \equiv & B \vee (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B) \\
 & \equiv & B \vee (A \wedge B) \equiv B
\end{array}
$$

Literales proposicionales

- Una fórmula F es un **literal** si es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional.
- Dos literales, L_1 y L_2, son **complementarios** si uno de ellos es la negación del otro. L^c denota el literal complementario de L.

Lema. Sea $\Sigma = \{L_1, \ldots, L_n\}$ un conjunto de literales. Entonces:

1. $\bigvee_{i=1}^{n} L_i \in TAUT \iff \Sigma$ contiene un par de literales complementarios.
2. $\bigwedge_{i=1}^{n} L_i \notin SAT \iff \Sigma$ contiene un par de literales complementarios.

Formas normales en LP

- Una fórmula está en **Forma Normal Conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de disyunciones de literales:

$$F = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

- Una fórmula está en **Forma Normal Disjuntiva (FND)** si es una disyunción de conjunciones de literales:

$$F = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \right)$$

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Formas normales en LP (II)

Corolario.

- Una fórmula en FNC es una tautología si y solo si cada una de sus disyunciones es una tautología.
- Una fórmula en FND es insatisfactible si y solo si cada una de sus conjunciones es insatisfactible.

Teorema.

Para toda fórmula $G \in PROP$:

- existe F_1 en **FNC** tal que $F_1 \equiv G$.
- existe F_2 en **FND** tal que $F_2 \equiv G$.

Introducción

Formas normales

Equivalencia lógica

Sustitución

Formas normales

Algoritmos para SAT y TAUT

Tablero y Formas Normales

Forma clausal

Algoritmo DPLL

Estructura del algoritmo

Extracción de Modelos

Paso a forma normal

Procedimiento para transformar G a FNC:

1. Eliminar todas las implicaciones usando:

   $$A \to B \equiv \neg A \vee B \quad \text{y} \quad A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

2. Trasladar las negaciones, mediante las leyes de Morgan:

   $$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \text{y} \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

3. Eliminar negaciones dobles usando

   $$\neg\neg A \equiv A$$

4. Convertir a FNC utilizando la ley distributiva:

   $$A \vee (B_1 \wedge B_2) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2)$$

Para pasar a FND, en 4 utilizamos la ley distributiva:

$$A \wedge (B_1 \vee B_2) \equiv (A \wedge B_1) \vee (A \wedge B_2)$$

Ejemplo:

Obtener una FNC de $(\neg p \wedge q) \to (q \vee r) \to p$:

$$
\begin{array}{ll}
(\neg p \wedge q) \to (q \vee r) \to p & \Rightarrow \\
\quad \Rightarrow & \neg(\neg p \wedge q) \vee ((q \vee r) \to p) \\
\quad \Rightarrow & \neg(\neg p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee p \\
\quad \Rightarrow & \neg\neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee p \\
\quad \Rightarrow & p \vee \neg q \vee ((\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)) \\
\quad \Rightarrow & (p \vee \neg q \vee \neg q \vee p) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r \vee p) \\
\quad \Rightarrow & (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg r \vee p)
\end{array}
$$

Hemos eliminado literales repetidos en una misma cláusula gracias a la equivalencia: $A \vee A \equiv A$.
(En la FND utilizaríamos la equivalencia $A \wedge A \equiv A$).

Algoritmo de satisfactibilidad mediante FND

Procedimiento FND

Entrada: $F \in PROP$

Salida: `SI`, si $F \in SAT$; `NO`, en caso contrario.

Calcular una FND de F: $G = G_1 \vee \cdots \vee G_n$

para $i = 1$ **hasta** n

si en G_i no ocurren literales complementarios

entonces devolver `SI`; parar

devolver `NO`

Algoritmo de validez mediante FNC

Procedimiento FNC

Entrada: $F \in PROP$

Salida: `SI`, si $F \in TAUT$; `NO`, en caso contrario.

Calcular una FNC de F: $G = G_1 \wedge \cdots \wedge G_n \leftarrow FNC(F)$

para $i = 1$ **hasta** n

si en G_i no ocurren literales complementarios

entonces devolver `NO`; parar

devolver `SI`

Ejemplos

- $F_1 = (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r) \vee p$.
  Una FNC de F_1 es:
  $$(\neg p \vee \neg q \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee p)$$
  Es una tautología (y, por tanto, satisfactible).
- $F_2 = \neg(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$.
  Una FND de F_2 es:
  $$(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$$
  Por tanto, F_2 es satisfactible.

  Una FNC de F_2 es:
  $$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee q)$$
  Por tanto, F_2 no es tautología.

Tableros completos y FND

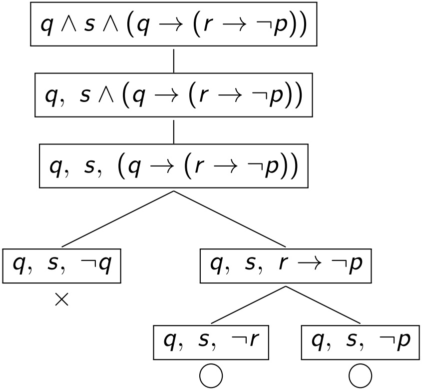
- Un tablero completo para una fórmula F puede utilizarse para obtener una FND de F.
- Si T es un tablero completo para F, procedemos como sigue:
  1. Si $U_1, \ldots, U_k$ son los conjuntos de literales que etiquetan las hojas abiertas de T, formamos para cada U_j una conjunción, C_j, con todos los literales de U_j.
  2. Una FND de F se obtiene formando la disyunción

$$C_1 \vee \cdots \vee C_k$$

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Tableros y FND: Ejemplo

Si F es la fórmula $q \land s \land (q \to (r \to \neg p))$



Una FND de F es $(q \land s \land \neg r) \lor (q \land s \land \neg p)$.

Tableros y FNC

- Para obtener una FNC de una fórmula F:
  - Si G es una FND de $\neg F$, aplicando a $\neg G$ las leyes de De Morgan y eliminación de negaciones dobles transformamos $\neg G$ en una FNC de F.
- Por tanto, para obtener una FNC de F seguimos el siguiente procedimiento:
  1. Calculamos un tablero completo para $\neg F$.
  2. Si $U_1, \dots, U_k$ son los conjuntos de literales que etiquetan las hojas abiertas del tablero completo para $\neg F$, formamos para cada U_j una disyunción D_j con los literales complementarios de los literales de U_j.
  3. Una FNC de F es la conjunción

$$D_1 \wedge \cdots \wedge D_k$$

Tableros y FNC: Ejemplos

Sea F la fórmula $s \wedge ((\neg r \to p) \to q)$.

1. Una FND de $\neg F$ es $G \equiv \quad \neg s \vee (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)$
2. Ahora $\neg G$ proporciona una FNC de F:

$$\begin{array}{rcl} F \equiv \neg G & \equiv & \neg(\neg s \vee (r \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \\ & \equiv & \neg\neg s \wedge \neg(r \wedge \neg q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)) \\ & \equiv & s \wedge (\neg r \vee \neg\neg q) \wedge (\neg p \vee \neg\neg q)) \\ & \equiv & s \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \end{array}$$

Introducción

Formas normales

Equivalencia lógica

Sustitución

Formas normales

Algoritmos para SAT y TAUT

Tablero y Formas Normales

Forma clausal

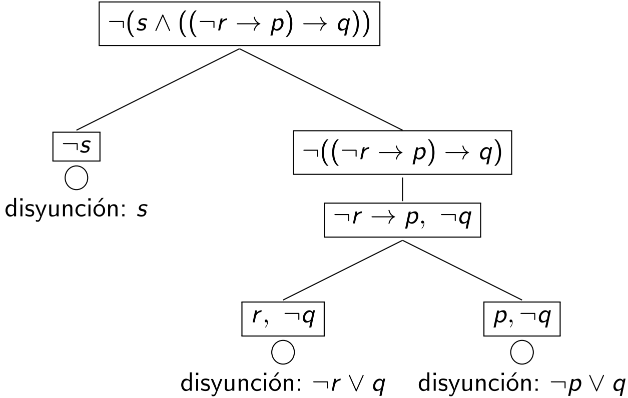
Algoritmo DPLL

Estructura del algoritmo

Extracción de Modelos

Tableros y FNC: Ejemplo (II)

Si F es la fórmula $s \wedge ((\neg r \rightarrow p) \rightarrow q)$. Calculamos un tablero completo para $\neg F$:



Una FNC de F es $s \wedge (\neg r \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$.

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Cláusulas en LP

- Una **cláusula** es una disyunción de literales $L_1 \vee \cdots \vee L_n$.
- Dada una valoración v y una cláusula $L_1 \vee \cdots \vee L_n$:

  $$v \models L_1 \vee \cdots \vee L_n \iff \text{Existe } i = 1, \ldots, n \text{ tal que } v \models L_i$$

  Por tanto, el valor de verdad de $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ no depende ni del orden en que aparecen los literales ni de posibles repeticiones de literales.
- En consecuencia, identificamos la cláusula $L_1 \vee \cdots \vee L_n$ con el conjunto de literales $\{L_1, \ldots L_n\}$.
- Caso especial: la **cláusula vacía**, correspondiente al conjunto de literales vacío. La denotamos por $\square$.
- Por definición, para toda valoración, v, se tiene que $v(\square) = 0$, es decir, $\square$ es una contradicción.

Forma clausal en LP

Teorema.
Para toda fórmula $F \in PROP$ existe un conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ tal que para toda valoración, v,

$$v \models F \quad \Longleftrightarrow \quad v \models \{C_1, \ldots, C_n\}$$

$\{C_1, \ldots, C_n\}$ se denomina una **forma clausal** de F.

Demotración: Podemos obtener una forma clausal a partir de una FNC, ya que si

$$(L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{m,1} \vee \cdots \vee L_{m,n_m})$$

es la FNC, basta escribirla en forma clausal como:

$$\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{m,1}, \cdots, L_{m,n_m}\}\}$$

Forma clausal en LP (II)

Corolario.
En el caso de un conjunto de fórmulas U existe un conjunto de cláusulas $\{C_1, \ldots, C_n\}$ tal que para toda valoración, v,

$$v \models U \iff v \models \{C_1, \ldots, C_n\}$$

$\{C_1, \ldots, C_n\}$ se denomina una **forma clausal** de U.

Nota: Podemos obtener una forma clausal de un conjunto U uniendo formas clausales de las fórmulas de U. Por ejemplo:

$$U = \{\underbrace{p \to q}_{(1)}, \underbrace{(p \vee \neg q) \wedge (r \to \neg p)}_{(2)}, \underbrace{p \wedge \neg r}_{(3)}\}$$

Una forma clausal de U es:

$$\{\underbrace{\neg p \vee q}_{(1)}, \underbrace{p \vee \neg q, \neg r \vee \neg p}_{(2)}, \underbrace{p, \neg r}_{(3)}\}$$

El algoritmo DPLL

- Determinar la **satisfactibilidad** de un conjunto de cláusulas, por lo que requiere una fase de preprocesamiento.
- Es un refinamiento (Davis, Logemann y Loveland, 1962) de un algoritmo propuesto por Davis y Putnam (1960).
- Es la base de muchos "SAT solvers": programas para determinar la satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas proposicionales (habitualmente, cláusulas).
- Puede utilizarse como algoritmo de decisión, y también como generador de modelos.
- Hace una búsqueda sistemática por medio de los posibles valores de las variables proposicionales.
- Al igual que los Tableros Semánticos, suele representarse gráficamente mediante un árbol binario.

Formas Normales y Algoritmo DPLL

Introducción

Formas normales

Equivalencia lógica

Sustitución

Formas normales

Algoritmos para SAT y TAUT

Tablero y Formas Normales

Forma clausal

Algoritmo DPLL

Estructura del algoritmo

Extracción de Modelos

Tableros vs DPLL

Tienen características propias que distinguen claramente ambos métodos:

- **Algoritmo DPLL**:
  - No trabaja con fórmulas arbitrarias sino sobre conjuntos de **cláusulas**. Es preciso "preprocesar" el conjunto de fórmulas, pasándolo a forma clausal.
  - Está entre los algoritmos más eficientes para la lógica proposicional, pero no se extiende fácilmente a otras lógicas.
- **Tableros semánticos**:
  - Trabaja directamente sobre el conjunto de fórmulas proposicionales.
  - No es tan eficiente como DPLL, pero es muy flexible y puede adaptarse a otras lógicas (lógica de primer orden, descriptivas, modales, etc.), donde resulta útil en el estudio teórico.

Estructura del algoritmo

- Podemos distinguir dos partes en el algoritmo:
  1. **Propagación de unidades**: simplifica el conjunto de cláusulas.
  2. **División**: organiza la búsqueda de una valoración que muestre que el conjunto es satisfactible.
- El algoritmo puede describirse de manera recursiva:

Procedimiento *DPLL*
Entrada: S conjunto de cláusulas
Salida: `SI`, si $S \in SAT$; `NO`, en caso contrario
  Si $S = \emptyset$ **devolver** `SI`
  Si $\square \in S$ **devolver** `NO`
  Si S tiene unidades:
    devolver $DPLL(Propaga\_unidades(S))$
  Si no:
    $\{S_1,\ S_2\} = Division(S)$
    devolver $DPLL(S_1) \vee DPLL(S_2)$

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Propagación de unidades

- Se elige una cláusula unitaria $L \in S$ y se aplican consecutivamente las dos reglas siguientes:
  1. **Subsunción unitaria**. Se eliminan de S todas las cláusulas subsumidas por L, es decir, que contengan el literal L (inluida la propia cláusula L).
  2. **Resolución unidad**. Se elimina el literal complementario L^c de todas las cláusulas de S.
- El proceso se repite hasta que no queden unidades en S.

Procedimiento *Propaga_unidades*
Entrada: S conjunto de cláusulas
Salida: Conjunto de cláusulas
Mientras S tenga unidades:
Selecciona L unidad de S
$S = \{C \; : L \notin C, \; C \in S\}$
$S = \{C - \{L^c\} \; : L^c \in C, \; C \in S\}$
devolver S'

Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

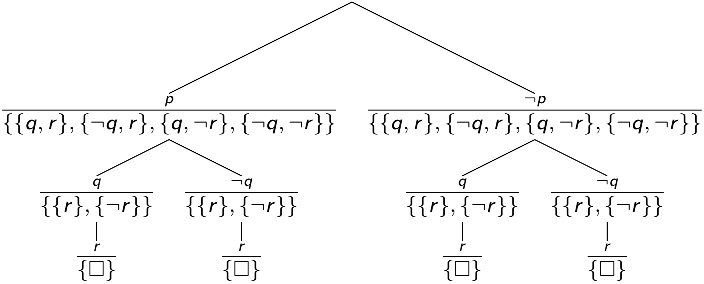
División

- Tras el proceso de propagación, si el algoritmo no ha parado, entonces S no contiene cláusulas unitarias.
- Se elige un literal L que aparezca en una cláusula de S y se construyen los conjuntos: $S \cup \{L\}$ y $S \cup \{L^c\}$.

> **Procedimiento División**
> *Entrada:* S conjunto de cláusulas
> *Salida:* Dos conjuntos de cláusulas
> Selecciona $C \in S$, $L \in C$
> **devolver** $\{S \cup \{\{L\}\},\ S \cup \{\{L^c\}\}\}$

Ejemplo

$$S = \{\{p, q, r\}, \{\neg p, q, r\}, \{\neg q,\ r\}, \{\neg q,\ \neg r\}, \{q,\ \neg r\}\}$$



Por tanto, S es **insatisfactible**.

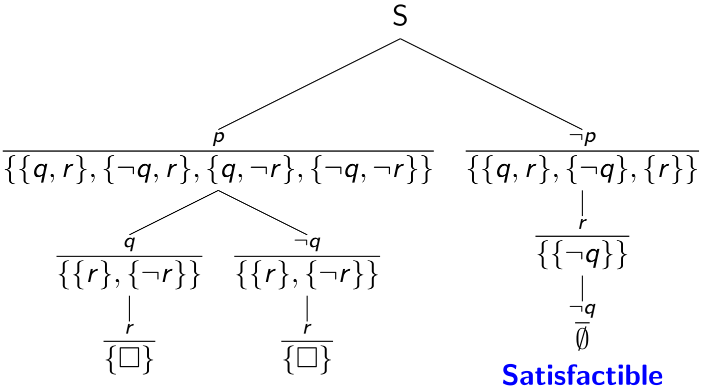
Introducción
Formas normales
Equivalencia lógica
Sustitución
Formas normales
Algoritmos para SAT y TAUT
Tablero y Formas Normales
Forma clausal
Algoritmo DPLL
Estructura del algoritmo
Extracción de Modelos

Extracción de modelos

- Si el algoritmo DPLL responde afirmativamente (S es satisfactible, y en consecuencia tiene modelos), entonces cada rama que llega a $\emptyset$ proporciona modelos.
- Para obtener el modelo de una rama, basta anotar la elección de unidades que se ha hecho a lo largo de la misma (ya sea por propagación, o por división):
  - Si una unidad aparece positiva, la valoración para la variable asociada será 1.
  - Si una unidad aparece negativa, la valoración para la variable asociada será 0.
  - Las variables que no intervienen pueden tener cualquier valor de verdad asignado.
- Además, por la forma en que trabaja DPLL, ramas distintas proporcionan siempre modelos distintos (algo que no pasaba con tableros semánticos).

Ejemplo

$$\begin{aligned} S \quad = \quad & \{\{p, q, r\}, \{\neg p, q, r\}, \{p, \neg q\}, \{p, r\}, \\ & \{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, q, \neg r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}\} \end{aligned}$$



Un modelo de S sería: $v(p) = 0, \ v(r) = 1, \ v(q) = 0$