

Tema 6: Deducción natural con Jape

José A. Alonso Jiménez

Jose-Antonio.Alonso@cs.us.es

<http://www.cs.us.es/~jalonso>

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reglas de la conjunción

- Reglas de la conjunción:

- Regla de introducción de la conjunción: $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$

- Reglas de eliminación de la conjunción: $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1$ $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$

- Ejemplo: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$:

1 :	$p \wedge q, r$	premises
2 :	q	$\wedge e_2 \quad 1.1$
3 :	$q \wedge r$	$\wedge i \quad 2, 1.2$

- Adecuación de las reglas de la conjunción:

- * $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$

- * $\wedge e_1 : F \wedge G \models F$

- * $\wedge e_2 : F \wedge G \models G$

Reglas de la doble negación

- Reglas de la doble negación

- Regla de eliminación de la doble negación: $\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$

- Regla de introducción de la doble negación: $\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$

- Ejemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg p \wedge r$:

1 :	$p, \neg\neg(q \wedge r)$	premises
2 :	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 1.1
3 :	$q \wedge r$	$\neg\neg e$ 1.2
4 :	r	$\wedge e$ 3
5 :	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge i$ 2,4

- Adecuación de las reglas de la doble negación:

* $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$

* $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

Regla de eliminación del condicional

- Regla de eliminación del condicional:

- Regla de eliminación del condicional:
$$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow_e$$

- Ejemplo: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$:

1 :	$\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$	premises
2 :	$r \vee \neg p$	$\rightarrow_e$ 1.1,1.2

- Ejemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$:

1 :	$p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premises
2 :	q	$\rightarrow_e$ 1.1,1.2
3 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow_e$ 1.1,1.3
4 :	r	$\rightarrow_e$ 2,3

- Adecuación de la regla de eliminación del condicional: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$

Regla derivada de modus tollens (MT)

- Regla derivada de modus tollens (MT)

- Regla derivada de modus tollens (MT):
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r) , p , \neg r$	premises
2 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1.2,1.1
3 :	$\neg q$	MT 1.3,2

- Ejemplo: $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1 :	$\neg p \rightarrow q , \neg q$	premises
2 :	$\neg \neg p$	MT 1.2,1.1
3 :	p	$\neg \neg e$ 2

- Ejemplo: $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$:

Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional

- Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1 :	$p \rightarrow q$	premise
2 :	$\neg q$	assumption
3 :	$\neg p$	MT 2,1
4 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 2–3

- Adecuación de la regla de introducción del condicional:

Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	premise
2 :	p	assumption
3 :	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4 :	$\neg\neg q$	MT 3,1
5 :	$p \rightarrow \neg\neg q$	$\rightarrow i$ 2-4

- Ejemplo (de teorema): $\vdash p \rightarrow p$:

1 :	p	assumption
2 :	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 1-1

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$:

1 :	$q \rightarrow r$	assumption
2 :	$\neg q \rightarrow \neg p$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$\neg \neg p$	$\neg \neg i$ 3
5 :	$\neg \neg q$	MT 4,2
6 :	q	$\neg \neg e$ 5
7 :	r	$\rightarrow e$ 6,1
8 :	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3–7
9 :	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2–8
10 :	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1–9

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$:

1 :	$p \wedge q \rightarrow r$	premise
2 :	p	assumption
3 :	q	assumption
4 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,3
5 :	r	$\rightarrow e$ 4,1
6 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3–5
7 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2–6

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$:

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premise
2 :	$p \wedge q$	assumption
3 :	p	$\wedge e1$ 2
4 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 3,1
5 :	q	$\wedge e2$ 2
6 :	r	$\rightarrow e$ 5,4
7 :	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 2–6

Regla de introducción del condicional

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$:

1 :	$p \rightarrow q$	premise
2 :	$p \wedge r$	assumption
3 :	p	$\wedge e1$ 2
4 :	r	$\wedge e2$ 2
5 :	q	$\rightarrow e$ 3,1
6 :	$q \wedge r$	$\wedge i$ 5,4
7 :	$p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	$\rightarrow i$ 2–6

Reglas de la disyunción

- Reglas de la disyunción:

- Reglas de introducción de la disyunción: $\frac{F}{F \vee G} \vee i_1$ $\frac{G}{F \vee G} \vee i_2$

- Regla de eliminación de la disyunción:

$$\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \vdots \\ H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \vdots \\ H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$$

- Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$:

1 :	p ∨ q	premise
2 :	p	assumption
3 :	q ∨ p	∨i2 2
4 :	q	assumption
5 :	q ∨ p	∨i1 4
6 :	q ∨ p	∨e 1,2–3,4–5

Reglas de la disyunción

- Ejemplo: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$:

1 :	$q \rightarrow r$	premise
2 :	$p \vee q$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$p \vee r$	$\vee i1$ 3
5 :	q	assumption
6 :	r	$\rightarrow e$ 5,1
7 :	$p \vee r$	$\vee i2$ 6
8 :	$p \vee r$	$\vee e$ 2,3–4,5–7
9 :	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow i$ 2–8

Reglas de la disyunción

- Ejemplo: $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$:

1 :	$(p \vee q) \vee r$	premise
2 :	$p \vee q$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i1$ 3
5 :	q	assumption
6 :	$q \vee r$	$\vee i1$ 5
7 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i2$ 6
8 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 2,3–4,5–7
9 :	r	assumption
10 :	$q \vee r$	$\vee i2$ 9
11 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee i2$ 10
12 :	$p \vee (q \vee r)$	$\vee e$ 1,2–8,9–11

Reglas de la disyunción

- Ejemplo (distributiva): $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

1 :	$p \wedge (q \vee r)$	premise
2 :	p	$\wedge e1$ 1
3 :	$q \vee r$	$\wedge e2$ 1
4 :	q	assumption
5 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,4
6 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i1$ 5
7 :	r	assumption
8 :	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2,7
9 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i2$ 8
10 :	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3,4–6,7–9

Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

1 :	p	assumption
2 :	q	assumption
3 :	p	hyp 1
4 :	q $\rightarrow$ p	$\rightarrow$ i 2–3
5 :	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow$ i 1–4

Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar falso:
 - Extensión de la sintaxis: $\perp$ es una fórmula proposicional.
 - Extensión de la semántica: $v(\perp) = 0$ en cualquier valoración.
- Reglas de la negación:
 - Regla de eliminación de lo falso: $\frac{\perp}{F} \perp e$
 - Regla de eliminación de la negación: $\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
 - Adecuación de las reglas de la negación:
 - * $\perp \models F$
 - * $\{F, \neg F\} \models \perp$

Reglas de la negación

- Ejemplo $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$:

1 :	$\neg p \vee q$	premise
2 :	$\neg p$	assumption
3 :	p	assumption
4 :	$\perp$	$\neg e$ 2,3
5 :	q	$\perp e$ 4
6 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 3–5
7 :	q	assumption
8 :	p	assumption
9 :	q	hyp 7
10 :	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 8–9
11 :	$p \rightarrow q$	$\vee e$ 1,2–6,7–10

Reglas de la negación

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg F} \neg i$$

- Adecuación: Si $F \models \perp$, entonces $\models \neg F$.
- Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:

1 :	$p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q$	premises
2 :	p	assumption
3 :	q	$\rightarrow e$ 2,1.1
4 :	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2,1.2
5 :	$\perp$	$\neg e$ 4,3
6 :	$\neg p$	$\neg i$ 2–5

Reglas de la negación

- Ejemplo: $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$:

1 :	$p \rightarrow \neg p$	premise
2 :	p	assumption
3 :	$\neg p$	$\rightarrow e$ 2,1
4 :	$\perp$	$\neg e$ 3,2
5 :	$\neg p$	$\neg i$ 2–4

Reglas de la negación

- Ejemplo $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$:

1 :	$p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p$	premises
2 :	$\neg q$	assumption
3 :	$p \wedge \neg q$	$\wedge i$ 1.3,2
4 :	r	$\rightarrow e$ 3,1.1
5 :	$\perp$	$\neg e$ 1.2,4
6 :	$\neg \neg q$	$\neg i$ 2–5
7 :	q	$\neg \neg e$ 6

- Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r$	premises
2 :	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1.2,1.1
3 :	$\neg q$	MT 1.3,2

Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional:
$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

- Ejemplo: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$:

1 :	$p \wedge q$	assumption
2 :	p	$\wedge e1 \quad 1$
3 :	q	$\wedge e2 \quad 1$
4 :	$q \wedge p$	$\wedge i \quad 3,2$
5 :	$p \wedge q \rightarrow q \wedge p$	$\rightarrow i \quad 1-4$
6 :	$q \wedge p$	assumption
7 :	q	$\wedge e1 \quad 6$
8 :	p	$\wedge e2 \quad 6$
9 :	$p \wedge q$	$\wedge i \quad 8,7$
10 :	$q \wedge p \rightarrow p \wedge q$	$\rightarrow i \quad 6-9$
11 :	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$	$\leftrightarrow i \quad 5,10$

Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional: $\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1$ $\frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$
- Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$:

1 :	$p \leftrightarrow q, p \vee q$	premises
2 :	p	assumption
3 :	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e1$ 1.1
4 :	q	$\rightarrow e$ 2,3
5 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,4
6 :	q	assumption
7 :	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e2$ 1.1
8 :	p	$\rightarrow e$ 6,7
9 :	$p \wedge q$	$\wedge i$ 8,6
10 :	$p \wedge q$	$\vee e$ 1.2,2–5,6–9

Reglas derivadas: modus tollens

- Regla derivada de modus tollens (MT):
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

1 :	$F \rightarrow G, \neg G$	premises
2 :	F	assumption
3 :	G	$\rightarrow e$ 2,1.1
4 :	$\perp$	$\neg e$ 1.2,3
5 :	$\neg F$	$\neg i$ 2–4

Reglas derivadas: introducción de doble negación

- Regla de introducción de la doble negación: $\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$

1 :	F	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	$\perp$	$\neg e$ 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2–3

Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

- Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{F} \text{RAA}$$

1 :	$\neg F \rightarrow \perp$	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	$\perp$	$\rightarrow e$ 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg i$ 2–3
5 :	F	$\neg\neg e$ 4

Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ley del tercio excluido (LEM): $\overline{F \vee \neg F} \text{ LEM}$

1 :	$\neg(F \vee \neg F)$	assumption
2 :	F	assumption
3 :	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 2
4 :	$\perp$	$\neg e$ 1,3
5 :	$\neg F$	$\neg i$ 2–4
6 :	$F \vee \neg F$	$\vee i$ 5
7 :	$\perp$	$\neg e$ 1,6
8 :	$\neg\neg(F \vee \neg F)$	$\neg i$ 1–7
9 :	$F \vee \neg F$	$\neg\neg e$ 8

Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$:

1 :	$p \rightarrow q$	premise
2 :	$p \vee \neg p$	LEM
3 :	p	assumption
4 :	q	$\rightarrow e$ 3,1
5 :	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 4
6 :	$\neg p$	assumption
7 :	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 6
8 :	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 2,3–5,6–7

Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
$\vee$	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ H \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} G \\ \vdots \\ H \end{array}}}{H} \vee e$
$\rightarrow$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
$\perp$		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
$\leftrightarrow$	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

Reglas del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal:

$$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]} \forall e$$

donde $[x/t]$ es libre para F .

- Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.

- Ejemplo 1: $P(c), (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$

1 :	var y , $P(y)$, $\forall x.(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	premises
2 :	$P(y) \rightarrow \neg Q(y)$	$\forall e$ 1.3
3 :	$\neg Q(y)$	$\rightarrow e$ 1.2,2

- Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \not\vdash (\exists y)(y < y)$.

Reglas del cuantificador universal

- Regla de introducción del cuantificador universal
 - Regla de introducción del cuantificador universal:

$$\frac{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ F[x/x_0] \end{array}}{(\forall x)F} \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\wedge i$.
- Ejemplo 2: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x)$

1 :	$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$, $\forall x.P(x)$	premises
2 :	var c	assumption
3 :	$P(c) \rightarrow Q(c)$	$\forall e$ 1.1
4 :	$P(c)$	$\forall e$ 1.2
5 :	$Q(c)$	$\rightarrow e$ 4,3
6 :	$\forall x.Q(x)$	$\forall i$ 2–5

Reglas del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial:

$$\frac{F[x/t]}{(\exists x)F} \exists i$$

donde $[x/t]$ es libre para F .

- Nota: Analogía con $\forall i_1$ y $\forall i_2$.

- Ejemplo 3: $(\forall x)P(x)(\exists x)P(x)$

1 :	var c , $\forall x.P(x)$	premises
2 :	$P(c)$	$\forall e$ 1.2
3 :	$\exists x.P(x)$	$\exists i$ 2

Reglas del cuantificador existencial

- Regla de eliminación del cuantificador existencial

- Regla de eliminación del cuantificador existencial:

$$\frac{(\exists x)F \quad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G} \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\forall e$.

- Ejemplo 4: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$

1 :	$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$	, $\exists x.P(x)$	premises
2 :	var c , $P(c)$		
3 :	$P(c) \rightarrow Q(c)$		$\forall e$ 1.1
4 :	$Q(c)$		$\rightarrow e$ 2.2,3
5 :	$\exists x.Q(x)$		$\exists i$ 4
6 :	$\exists x.Q(x)$		$\exists e$ 1.2,2–5

Reglas del cuantificador existencial

- Ejemplo 5: $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$

1 :	$\forall x.(Q(x) \rightarrow R(x)) \quad , \quad \exists x.(P(x) \wedge Q(x))$	premises
2 :	var c , $P(c) \wedge Q(c)$	assumptions
3 :	$Q(c) \rightarrow R(c)$	$\forall e$ 1.1
4 :	$Q(c)$	$\wedge e2$ 2.2
5 :	$R(c)$	$\rightarrow e$ 4,3
6 :	$P(c)$	$\wedge e1$ 2.2
7 :	$P(c) \wedge R(c)$	$\wedge i$ 6,5
8 :	$\exists x.(P(x) \wedge R(x))$	$\exists i$ 7
9 :	$\exists x.(P(x) \wedge R(x))$	$\exists e$ 1.2,2–8

Reglas del cuantificador existencial

- Ejemplo 6: $(\exists x)P(x), (\forall x)(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(y)) \vdash (\forall y)Q(y)$

1 :	$\exists x.P(x) , \forall x.\forall y.(P(x) \rightarrow Q(y))$	premises
2 :	var c	assumption
3 :	var c1 , P(c1)	assumptions
4 :	$\forall y.(P(c1) \rightarrow Q(y))$	$\forall e$ 1.2
5 :	$P(c1) \rightarrow Q(c)$	$\forall e$ 4
6 :	$Q(c)$	$\rightarrow e$ 3.2,5
7 :	$Q(c)$	$\exists e$ 1.1,3–6
8 :	$\forall y.Q(y)$	$\forall i$ 2–7

Equivalencias

- Equivalencias:

- Sean F y G fórmulas.

$$[1(a)] \quad \neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$$

$$[1(b)] \quad \neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$$

- Sean F y G fórmulas y x una variable no libre en G .

$$[2(a)] \quad (\forall x) \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$$

$$[2(b)] \quad (\forall x) \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$$

$$[2(c)] \quad (\exists x) \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$$

$$[2(d)] \quad (\exists x) \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$$

$$[2(e)] \quad (\forall x) \rightarrow G \equiv F \rightarrow (\forall x)G$$

$$[2(f)] \quad (\exists x) \rightarrow G \equiv (\forall x)F \rightarrow G$$

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.

$$[3(a)] \quad (\forall x)F \wedge (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$$

$$[3(b)] \quad (\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$$

- Sean F y G fórmulas.

$$[4(a)] \quad (\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$$

$$[4(b)] \quad (\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$$

Equivalencias

- Equivalencia 1(a): $\neg(\forall x)F \vdash (\exists x)\neg F$

1 :	$\neg(\forall x.P(x))$	premise
2 :	$\neg(\exists x.\neg P(x))$	assumption
3 :	var c	assumption
4 :	$\neg P(c)$	assumption
5 :	$\exists x.\neg P(x)$	$\exists i$ 4
6 :	$\perp$	$\neg e$ 2,5
7 :	$P(c)$	RAA 4–6
8 :	$\forall x.P(x)$	$\forall i$ 3–7
9 :	$\perp$	$\neg e$ 1,8
10 :	$\exists x.\neg P(x)$	RAA 2–9

Equivalencias

- Equivalencia 1(a): $(\exists x)\neg F \vdash \neg(\forall x)F$

1 :	$\exists x.\neg P(x)$	premise
2 :	$\neg\neg(\forall x.P(x))$	assumption
3 :	$\forall x.P(x)$	$\neg\neg e$ 2
4 :	var c , $\neg P(c)$	assumptions
5 :	$P(c)$	$\forall e$ 3
6 :	$\perp$	$\neg e$ 4,5
7 :	$\perp$	$\exists e$ 1,4–6
8 :	$\neg(\forall x.P(x))$	RAA 2–7

Equivalencias

- Equivalencia 1(a): $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

$$1 : \neg(\forall x.P(x))$$

assumption

$$2 : \exists x.\neg P(x)$$

Theorem $\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists x.\neg P(x)$ 1

$$3 : \neg(\forall x.P(x)) \rightarrow \exists x.\neg P(x)$$

$\rightarrow$ i 1–2

$$4 : \exists x.\neg P(x)$$

assumption

$$5 : \neg(\forall x.P(x))$$

Theorem $\exists x.\neg P(x) \vdash \neg(\forall x.P(x))$ 4

$$6 : \exists x.\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x.P(x))$$

$\rightarrow$ i 4–5

$$7 : \neg(\forall x.P(x)) \leftrightarrow \exists x.\neg P(x)$$

$\leftrightarrow$ i 3,6

Equivalencias

- Equivalencia 3(a): $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \vdash (\forall x)(F \wedge G)$

1 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	premise
2 :	var c	assumption
3 :	$P(c) \wedge Q(c)$	$\forall e$ 1
4 :	$P(c)$	$\wedge e$ 3
5 :	$\forall x.P(x)$	$\forall i$ 2–4
6 :	var c1	assumption
7 :	$P(c1) \wedge Q(c1)$	$\forall e$ 1
8 :	$Q(c1)$	$\wedge e$ 7
9 :	$\forall x.Q(x)$	$\forall i$ 6–8
10 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\wedge i$ 5,9

Equivalencias

- Equivalencia 3(a): $(\forall x)(F \wedge G) \vdash (\forall x)F \wedge (\forall x)G$

1 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	premise
2 :	var c	assumption
3 :	$\forall x.P(x)$	$\wedge e1$ 1
4 :	$\forall x.Q(x)$	$\wedge e2$ 1
5 :	$P(c)$	$\forall e$ 3
6 :	$Q(c)$	$\forall e$ 4
7 :	$P(c) \wedge Q(c)$	$\wedge i$ 5,6
8 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall i$ 2–7

Equivalencias

- Equivalencia 3(a): $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

1 : $\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$

assumption

2 : $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$

Theorem $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$ 1

3 : $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$

$\rightarrow$ i 1–2

4 : $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$

assumption

5 : $\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$

Theorem $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$ 4

6 : $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \rightarrow \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$

$\rightarrow$ i 4–5

7 : $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$

$\leftrightarrow$ i 3,6

Equivalencias

- Equivalencia 3(b): $(\exists x)F \vee (\exists x)G \vdash (\exists x)(F \vee G)$

1 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	premise
2 :	$\exists x.P(x)$	assumption
3 :	var c , P(c)	assumptions
4 :	$P(c) \vee Q(c)$	$\vee i1$ 3.2
5 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists i$ 4
6 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists e$ 2,3–5
7 :	$\exists x.Q(x)$	assumption
8 :	var c1 , Q(c1)	assumptions
9 :	$P(c1) \vee Q(c1)$	$\vee i2$ 8.2
10 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists i$ 9
11 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists e$ 7,8–10
12 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\vee e$ 1,2–6,7–11

Equivalencias

- Equivalencia 3(b): $(\exists x)(F \vee G) \vdash (\exists x)F \vee (\exists x)G$

1 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	premise
2 :	var c , $P(c) \vee Q(c)$	assumptions
3 :	$P(c)$	assumption
4 :	$\exists x.P(x)$	$\exists i$ 3
5 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\vee i1$ 4
6 :	$Q(c)$	assumption
7 :	$\exists x.Q(x)$	$\exists i$ 6
8 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\vee i2$ 7
9 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\vee e$ 2,2,3–5,6–8
10 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\exists e$ 1,2–9

Equivalencias

- Equivalencia 3(b): $(\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

1 : $\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$

assumption

2 : $\exists x.(P(x) \vee Q(x))$

Theorem $\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x) \vdash \exists x.(P(x) \vee Q(x))$ 1

3 : $\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x) \rightarrow \exists x.(P(x) \vee Q(x))$

$\rightarrow$ i 1–2

4 : $\exists x.(P(x) \vee Q(x))$

assumption

5 : $\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$

Theorem $\exists x.(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$ 4

6 : $\exists x.(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$

$\rightarrow$ i 4–5

7 : $\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x) \leftrightarrow \exists x.(P(x) \vee Q(x))$

$\leftrightarrow$ i 3,6

Equivalencias

- Equivalencia 4(b): $(\exists x)(\exists y)F \vdash (\exists y)(\exists x)F$

1 :	$\exists x.\exists y.P(x,y)$	premise
2 :	var c , $\exists y.P(c,y)$	assumptions
3 :	var c1 , $P(c,c1)$	assumptions
4 :	$\exists x.P(x,c1)$	$\exists i$ 3.2
5 :	$\exists y.\exists x.P(x,y)$	$\exists i$ 4
6 :	$\exists y.\exists x.P(x,y)$	$\exists e$ 2.2,3–5
7 :	$\exists y.\exists x.P(x,y)$	$\exists e$ 1,2–6

Equivalencias

- Equivalencia 4(b): $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

1 : $\exists x.\exists y.P(x,y)$

assumption

2 : $\exists y.\exists x.P(x,y)$

Theorem $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 1

3 : $\exists x.\exists y.P(x,y) \rightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$

$\rightarrow$ i 1–2

4 : $\exists y.\exists x.P(x,y)$

assumption

5 : $\exists x.\exists y.P(x,y)$

Theorem $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 4

6 : $\exists y.\exists x.P(x,y) \rightarrow \exists x.\exists y.P(x,y)$

$\rightarrow$ i 4–5

7 : $\exists x.\exists y.P(x,y) \leftrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$

$\leftrightarrow$ i 3,6

Reglas de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} =_e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F .

- Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} 1 & (x + 1) = (1 + x) \quad \text{premisa} \\ 2 & (x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0) \quad \text{premisa} \\ 3 & (1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0) \quad =_e 1,2 \end{array}$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

$$\begin{array}{ll} 1 & t_1 = t_2 \quad \text{premisa} \\ 2 & t_2 = t_3 \quad \text{premisa} \\ 3 & t_1 = t_3 \quad =_e 2,1 \end{array}$$

Reglas de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:

$$\overline{t = t} =i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2, \vdash t_2 = t_1$

1 $t_1 = t_2$ premisa

2 $t_1 = t_1$ =i

3 $t_2 = t_1$ =e 1,2

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000) pp. 259–287.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review*. (2000) pp. 28–33.
- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 88–94.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)