

# Tema 14: El TAD de las pilas

## Informática (2013–14)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
  - Abstracción y tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
  - Signatura del TAD pilas
  - Propiedades del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
  - Las pilas como tipos de datos algebraicos
  - Las pilas como listas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
  - Librerías auxiliares
  - Generador de pilas
  - Especificación de las propiedades de las pilas
  - Comprobación de las propiedades

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos  
Abstracción y tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck

## Abstracción y tipos abstractos de datos

- ▶ La **abstracción** es un mecanismo para comprender problemas que involucran una gran cantidad de detalles.
- ▶ Aspectos de la abstracción:
  - ▶ **Destacar** los detalles relevantes.
  - ▶ **Ocultar** los detalles irrelevantes.
- ▶ Un **tipo abstracto de datos** (TAD) es una colección de *valores* y *operaciones* que se definen mediante una *especificación* que es independiente de cualquier *representación*.
- ▶ Un TAD es una abstracción:
  - ▶ Se destacan los detalles (normalmente pocos) de la especificación (*el qué*).
  - ▶ Se ocultan los detalles (normalmente numerosos) de la implementación (*el cómo*).
- ▶ Analogía con las **estructuras algebraicas**.

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
  - Signatura del TAD pilas
  - Propiedades del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck

## Descripción informal de las pilas

- ▶ Una **pila** es una estructura de datos, caracterizada por ser una secuencia de elementos en la que las operaciones de inserción y extracción se realizan por el mismo extremo.
- ▶ La pilas también se llaman estructuras LIFO (del inglés Last In First Out), debido a que el último elemento en entrar será el primero en salir.
- ▶ Analogía con las pilas de platos.

## Signatura del TAD de las pilas

### ► Signatura:

```
vacía      :: Pila a
apila      :: a -> Pila a -> Pila a
cima       :: Pila a -> a
desapila   :: Pila a -> Pila a
esVacía    :: Pila a -> Bool
```

### ► Descripción:

- `vacía` es la pila vacía.
- `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` al principio de `p`.
- `(cima p)` es la cima de la pila `p`.
- `(desapila p)` es la pila obtenida suprimiendo la cima de `p`.
- `(esVacía p)` se verifica si `p` es la pila vacía.

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
  - Signatura del TAD pilas
  - Propiedades del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck



## Propiedades de las pilas

1. `cima (apila x p) == x`
2. `desapila (apila x p) == p`
3. `esVacia vacia`
4. `not (esVacia (apila x p))`

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
  - Las pilas como tipos de datos algebraicos
  - Las pilas como listas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ Cabecera del módulo:

---

```
module PilaConTipoDeDatoAlgebraico
  (Pila,
   vacia,      -- Pila a
   apila,      -- a -> Pila a -> Pila a
   cima,       -- Pila a -> a
   desapila,  -- Pila a -> Pila a
   esVacia    -- Pila a -> Bool
  ) where
```

---

- ▶ Tipo de dato algebraico de las pilas.

---

```
data Pila a = Vacia | P a (Pila a)
           deriving Eq
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ Procedimiento de escritura de pilas.

---

```
instance (Show a) => Show (Pila a) where
    showsPrec p Vacía cad    = showChar '-' cad
    showsPrec p (P x s) cad =
        shows x (showChar '|' (shows s cad))
```

---

- ▶ Ejemplo de pila:

- ▶ Definición

---

```
p1 :: Pila Int
p1 = apila 1 (apila 2 (apila 3 vacía))
```

---

- ▶ Sesión

```
|ghci> p1
|1|2|3|-
```

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ `vacía` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
|ghci> vacía
|-
```

---

```
vacía :: Pila a
vacía = Vacía
```

---

- ▶ `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` encima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
|apila 4 p1 => 4|1|2|3|-
```

---

```
apila :: a -> Pila a -> Pila a
apila x p = P x p
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ `vacía` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
|ghci> vacía
|-
```

---

```
vacía :: Pila a
```

```
vacía = Vacía
```

---

- ▶ `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` encima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
|apila 4 p1 => 4|1|2|3|-
```

---

```
apila :: a -> Pila a -> Pila a
```

```
apila x p = P x p
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ `vacía` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
|ghci> vacía
|-
```

---

```
vacía :: Pila a
```

```
vacía = Vacía
```

---

- ▶ `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` encima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
|apila 4 p1 => 4|1|2|3|-
```

---

```
apila :: a -> Pila a -> Pila a
```

```
apila x p = P x p
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ `(cima p)` es la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| cima p1 == 1
```

---

```
cima :: Pila a -> a  
cima Vacía = error "cima: pila vacía"  
cima (P x _) = x
```

---

- ▶ `(desapila p)` es la pila obtenida suprimiendo la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| desapila p1 => 2|3|-
```

---

```
desapila :: Pila a -> Pila a  
desapila Vacía = error "desapila: pila vacía"  
desapila (P _ p) = p
```

---



## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ (`cima p`) es la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| cima p1 == 1
```

---

```
cima :: Pila a -> a
cima Vacía = error "cima: pila vacía"
cima (P x _) = x
```

---

- ▶ (`desapila p`) es la pila obtenida suprimiendo la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| desapila p1 => 2|3|-
```

---

```
desapila :: Pila a -> Pila a
desapila Vacía = error "desapila: pila vacía"
desapila (P _ p) = p
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ (`cima p`) es la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| cima p1 == 1
```

---

```
cima :: Pila a -> a
cima Vacía = error "cima: pila vacía"
cima (P x _) = x
```

---

- ▶ (`desapila p`) es la pila obtenida suprimiendo la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| desapila p1 => 2|3|-
```

---

```
desapila :: Pila a -> Pila a
desapila Vacía = error "desapila: pila vacía"
desapila (P _ p) = p
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ `(esVacia p)` se verifica si `p` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
esVacia p1      == False
esVacia vacia  == True
```

---

```
esVacia :: Pila a -> Bool
esVacia Vacia = True
esVacia _     = False
```

---

## Las pilas mediante tipos de datos algebraicos

- ▶ `(esVacia p)` se verifica si `p` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
esVacia p1      == False
esVacia vacia  == True
```

---

```
esVacia :: Pila a -> Bool
esVacia Vacia = True
esVacia _     = False
```

---

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
  - Las pilas como tipos de datos algebraicos
  - Las pilas como listas**
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck

## Implementación de las pilas mediante listas

### ► Cabecera del módulo

---

```
module PilaConListas
  (Pila,
   vacia,      -- Pila a
   apila,      -- a -> Pila a -> Pila a
   cima,       -- Pila a -> a
   desapila,   -- Pila a -> Pila a
   esVacia     -- Pila a -> Bool
  ) where
```

---

### ► Tipo de datos de las pilas:

---

```
newtype Pila a = P [a]
  deriving Eq
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ Procedimiento de escritura de pilas.

---

```
instance (Show a) => Show (Pila a) where
    showsPrec p (P [])      cad = showChar '-' cad
    showsPrec p (P (x:xs)) cad
        = shows x (showChar '|' (shows (P xs) cad))
```

---

- ▶ Ejemplo de pila: p1 es la pila obtenida anadiéndole los elementos 3, 2 y 1 a la pila vacía. Por ejemplo,

```
ghci> p1
1|2|3|-
```

---

```
p1 = apila 1 (apila 2 (apila 3 vacia))
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `vacia` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
| ghci> vacia
| -
```

---

```
vacia  :: Pila a
vacia = P []
```

---

- ▶ `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` encima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| apila 4 p1 => 4|1|2|3|-|
```

---

```
apila :: a -> Pila a -> Pila a
apila x (P xs) = P (x:xs)
```

---



## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `vacia` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
| ghci> vacia
| -
```

---

```
vacia  :: Pila a
```

```
vacia = P []
```

---

- ▶ `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` encima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| apila 4 p1 => 4|1|2|3|-|
```

---

```
apila :: a -> Pila a -> Pila a
```

```
apila x (P xs) = P (x:xs)
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `vacia` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
| ghci> vacia
| -
```

---

```
vacia :: Pila a
```

```
vacia = P []
```

---

- ▶ `(apila x p)` es la pila obtenida añadiendo `x` encima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| apila 4 p1 => 4|1|2|3|-|
```

---

```
apila :: a -> Pila a -> Pila a
```

```
apila x (P xs) = P (x:xs)
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `(cima p)` es la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| cima p1 == 1
```

---

```
cima :: Pila a -> a
cima (P (x:_)) = x
cima (P [])    = error "cima de la pila vacia"
```

---

- ▶ `(desapila p)` es la pila obtenida suprimiendo la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| desapila p1 => 2|3|-
```

---

```
desapila :: Pila a -> Pila a
desapila (P [])    = error "desapila la pila vacia"
desapila (P (_:xs)) = P xs
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ (`cima p`) es la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| cima p1 == 1
```

---

```
cima :: Pila a -> a
cima (P (x:_)) = x
cima (P [])   = error "cima de la pila vacia"
```

---

- ▶ (`desapila p`) es la pila obtenida suprimiendo la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| desapila p1 => 2|3|-
```

---

```
desapila :: Pila a -> Pila a
desapila (P [])       = error "desapila la pila vacia"
desapila (P (_:xs)) = P xs
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `(cima p)` es la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| cima p1 == 1
```

---

```
cima :: Pila a -> a
cima (P (x:_)) = x
cima (P [])    = error "cima de la pila vacia"
```

---

- ▶ `(desapila p)` es la pila obtenida suprimiendo la cima de la pila `p`. Por ejemplo,

```
| desapila p1 => 2|3|-
```

---

```
desapila :: Pila a -> Pila a
desapila (P [])    = error "desapila la pila vacia"
desapila (P (_:xs)) = P xs
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `(esVacia p)` se verifica si `p` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
esVacia p1      == False
esVacia vacia   == True
```

---

```
esVacia :: Pila a -> Bool
esVacia (P xs) = null xs
```

---

## Implementación de las pilas mediante listas

- ▶ `(esVacia p)` se verifica si `p` es la pila vacía. Por ejemplo,

```
esVacia p1      == False
esVacia vacia  == True
```

---

```
esVacia :: Pila a -> Bool
esVacia (P xs) = null xs
```

---

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
  - Librerías auxiliares
  - Generador de pilas
  - Especificación de las propiedades de las pilas
  - Comprobación de las propiedades



## Importación de librerías

- ▶ Importación de la implementación de pilas que se desea comprobar.

---

```
import PilaConTipoDeDatoAlgebraico  
-- import PilaConListas
```

---

- ▶ Importación de las librerías de comprobación

---

```
import Test.QuickCheck  
import Test.Framework  
import Test.Framework.Providers.QuickCheck2
```

---

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. **Comprobación de las implementaciones con QuickCheck**
  - Librerías auxiliares
  - Generador de pilas**
  - Especificación de las propiedades de las pilas
  - Comprobación de las propiedades

## Generador de pilas

- `genPila` es un generador de pilas. Por ejemplo,

```
ghci> sample genPila
0|0|-
-6|4|-3|3|0|-
-
9|5|-1|-3|0|-8|-5|-7|2|-
...
```

---

```
genPila :: (Num a, Arbitrary a) => Gen (Pila a)
```

```
genPila = do xs <- listOf arbitrary
           return (foldr apila vacia xs)
```

```
instance (Arbitrary a, Num a) => Arbitrary (Pila a) where
  arbitrary = genPila
```

---

- └ Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
- └ Especificación de las propiedades de las pilas

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. **Comprobación de las implementaciones con QuickCheck**
  - Librerías auxiliares
  - Generador de pilas
  - Especificación de las propiedades de las pilas**
  - Comprobación de las propiedades

- └ Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
- └ Especificación de las propiedades de las pilas

## Especificación de las propiedades de pilas

- ▶ La cima de la pila que resulta de añadir  $x$  a la pila  $p$  es  $x$ .

---

```
prop_cima_apila :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_cima_apila x p =
    cima (apila x p) == x
```

---

- ▶ La pila que resulta de desapilar después de añadir cualquier elemento a una pila  $p$  es  $p$ .

---

```
prop_desapila_apila :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_desapila_apila x p =
    desapila (apila x p) == p
```

---

- └ Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
- └ Especificación de las propiedades de las pilas

## Especificación de las propiedades de pilas

- ▶ La cima de la pila que resulta de añadir  $x$  a la pila  $p$  es  $x$ .

---

```
prop_cima_apila :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_cima_apila x p =
    cima (apila x p) == x
```

---

- ▶ La pila que resulta de desapilar después de añadir cualquier elemento a una pila  $p$  es  $p$ .

---

```
prop_desapila_apila :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_desapila_apila x p =
    desapila (apila x p) == p
```

---

## Especificación de las propiedades de pilas

- ▶ La cima de la pila que resulta de añadir  $x$  a la pila  $p$  es  $x$ .

---

```
prop_cima_apila :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_cima_apila x p =
    cima (apila x p) == x
```

---

- ▶ La pila que resulta de desapilar después de añadir cualquier elemento a una pila  $p$  es  $p$ .

---

```
prop_desapila_apila :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_desapila_apila x p =
    desapila (apila x p) == p
```

---

- └ Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
- └ Especificación de las propiedades de las pilas

## Especificación de las propiedades de pila

- ▶ La pila vacía está vacía.

---

```
prop_vacia_esta_vacia :: Bool
prop_vacia_esta_vacia =
    esVacia vacia
```

---

- ▶ La pila que resulta de añadir un elemento en un pila cualquiera no es vacía.

---

```
prop_apila_no_es_vacia :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_apila_no_es_vacia x p =
    not (esVacia (apila x p))
```

---



- └ Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
- └ Especificación de las propiedades de las pilas

## Especificación de las propiedades de pila

- ▶ La pila vacía está vacía.

---

```
prop_vacia_esta_vacia :: Bool
prop_vacia_esta_vacia =
    esVacia vacia
```

---

- ▶ La pila que resulta de añadir un elemento en un pila cualquiera no es vacía.

---

```
prop_apila_no_es_vacia :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_apila_no_es_vacia x p =
    not (esVacia (apila x p))
```

---

## Especificación de las propiedades de pila

- ▶ La pila vacía está vacía.

---

```
prop_vacia_esta_vacia :: Bool
prop_vacia_esta_vacia =
    esVacia vacia
```

---

- ▶ La pila que resulta de añadir un elemento en un pila cualquiera no es vacía.

---

```
prop_apila_no_es_vacia :: Int -> Pila Int -> Bool
prop_apila_no_es_vacia x p =
    not (esVacia (apila x p))
```

---

## Tema 14: El TAD de las pilas

1. Tipos abstractos de datos
2. Especificación del TAD de las pilas
3. Implementaciones del TAD de las pilas
4. Comprobación de las implementaciones con QuickCheck
  - Librerías auxiliares
  - Generador de pilas
  - Especificación de las propiedades de las pilas
  - Comprobación de las propiedades

## Definición del procedimiento de comprobación

- ▶ `compruebaPropiedades` comprueba todas las propiedades con la plataforma de verificación.

---

```
compruebaPropiedades =  
  defaultMain  
    [testGroup "Propiedades del TAD pilas"  
      [testProperty "P1" prop_cima_apila,  
        testProperty "P2" prop_desapila_apila,  
        testProperty "P3" prop_vacia_esta_vacia,  
        testProperty "P4" prop_apila_no_es_vacia]]
```

---

## Comprobación de las propiedades de las pilas

```
ghci> compruebaPropiedades
Propiedades del TAD pilas:
P1: [OK, passed 100 tests]
P2: [OK, passed 100 tests]
P3: [OK, passed 100 tests]
P4: [OK, passed 100 tests]
```

	Properties	Total
Passed	4	4
Failed	0	0
Total	4	4