

# Tema 22: Algoritmos sobre grafos

## Informática (2016–17)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional  
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.  
Universidad de Sevilla

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

### 1. El TAD de los grafos

Definiciones y terminología sobre grafos

Signatura del TAD de los grafos

Implementación de los grafos como vectores de adyacencia

Implementación de los grafos como matrices de adyacencia

### 2. Recorridos en profundidad y en anchura

Recorrido en profundidad

Recorrido en anchura

### 3. Árboles de expansión mínimos

Árboles de expansión mínimos

El algoritmo de Kruskal

El algoritmo de Prim

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

### 1. El TAD de los grafos

Definiciones y terminología sobre grafos

Signatura del TAD de los grafos

Implementación de los grafos como vectores de adyacencia

Implementación de los grafos como matrices de adyacencia

### 2. Recorridos en profundidad y en anchura

### 3. Árboles de expansión mínimos

## Definiciones y terminología sobre grafos

- ▶ Un **grafo  $G$**  es un par  $(V, A)$  donde  $V$  es el conjunto de los **vértices** (o nodos) y  $A$  el de las **aristas**.
- ▶ Una **arista** del grafo es un par de vértices.
- ▶ Un **arco** es una arista dirigida.
- ▶  $|V|$  es el número de vértices.
- ▶  $|A|$  es el número de aristas.
- ▶ Un vértice  $v$  es **adyacente** a  $v'$  si  $vv'$  es una arista del grafo.
- ▶ Un **grafo ponderado** es un grafo cuyas aristas tienen un peso.

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

### 1. El TAD de los grafos

Definiciones y terminología sobre grafos

**Signatura del TAD de los grafos**

Implementación de los grafos como vectores de adyacencia

Implementación de los grafos como matrices de adyacencia

### 2. Recorridos en profundidad y en anchura

### 3. Árboles de expansión mínimos

## Signatura del TAD de los grafos

```
creaGrafo    :: (Ix v, Num p) => Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] ->
              Grafo v p
dirigido     :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> Bool
adyacentes  :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
nodos       :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
aristas     :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
aristaEn    :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool
peso        :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
```

## Descripción de la signatura del TAD de grafos

- ▶ (`creaGrafo o cs as`) es un grafo (dirigido o no, según el valor de `o`), con el par de cotas `cs` y listas de aristas `as` (cada arista es un trío formado por los dos vértices y su peso).  
Ver un ejemplo en la siguiente transparencia.
- ▶ (`dirigido g`) se verifica si `g` es dirigido.
- ▶ (`nodos g`) es la lista de todos los nodos del grafo `g`.
- ▶ (`aristas g`) es la lista de las aristas del grafo `g`.
- ▶ (`adyacentes g v`) es la lista de los vértices adyacentes al nodo `v` en el grafo `g`.
- ▶ (`aristaEn g a`) se verifica si `a` es una arista del grafo `g`.
- ▶ (`peso v1 v2 g`) es el peso de la arista que une los vértices `v1` y `v2` en el grafo `g`.

## Ejemplo de creación de grafos.

```
creaGrafo ND (1,5) [(1,2,12), (1,3,34), (1,5,78),
                    (2,4,55), (2,5,32),
                    (3,4,61), (3,5,44),
                    (4,5,93)]
```

crea el grafo

```

      12
  1  -----  2
  | \78      /|
  |  \    32/ |
  |   \    /  |
34|       5   |55
  |   /    \  |
  |  /44    \ |
  | /      93\|
  3 -----  4
      61
```



## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

### 1. El TAD de los grafos

Definiciones y terminología sobre grafos

Signatura del TAD de los grafos

**Implementación de los grafos como vectores de adyacencia**

Implementación de los grafos como matrices de adyacencia

### 2. Recorridos en profundidad y en anchura

### 3. Árboles de expansión mínimos

## Los grafos como vectores de adyacencia

► Cabecera del módulo:

---

```

module GrafoConVectorDeAdyacencia
  (Orientacion (..),
   Grafo,
   creaGrafo,  -- (Ix v,Num p) => Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] ->
                --                               Grafo v p
   dirigido,   -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> Bool
   adyacentes, -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
   nodos,      -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> [v]
   aristas,    -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
   aristaEn,   -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool
   peso       -- (Ix v,Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
  ) where

```

---

► Librerías auxiliares.

---

```
import Data.Array
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- ▶ **Orientacion** es D (dirigida) ó ND (no dirigida).

---

```
data Orientacion = D | ND
                deriving (Eq, Show)
```

---

- ▶ **(Grafo v p)** es un grafo con vértices de tipo **v** y pesos de tipo **p**.

---

```
data Grafo v p = G Orientacion (Array v [(v,p)])
                deriving (Eq, Show)
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- (`creaGrafo o cs as`) es un grafo (dirigido o no según el valor de `o`), con el par de cotas `cs` y listas de aristas `as` (cada arista es un trío formado por los dos vértices y su peso). Ver un ejemplo a continuación.

---

```

creaGrafo :: (Ix v, Num p) =>
    Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] -> Grafo v p
creaGrafo D cs vs =
    G ND (accumArray
        (\xs x -> xs ++ [x]) [] cs
        [(x1,(x2,p)) | (x1,x2,p) <- vs])
creaGrafo ND cs vs =
    G D (accumArray
        (\xs x -> xs ++ [x]) [] cs
        [(x2,(x1,p)) | (x1,x2,p) <- vs, x1 /= x2] ++
        [(x1,(x2,p)) | (x1,x2,p) <- vs]))

```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- (`creaGrafo o cs as`) es un grafo (dirigido o no según el valor de `o`), con el par de cotas `cs` y listas de aristas `as` (cada arista es un trío formado por los dos vértices y su peso). Ver un ejemplo a continuación.

---

```

creaGrafo :: (Ix v, Num p) =>
    Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] -> Grafo v p
creaGrafo D cs vs =
    G ND (accumArray
        (\xs x -> xs ++ [x]) [] cs
        [(x1,(x2,p)) | (x1,x2,p) <- vs])
creaGrafo ND cs vs =
    G D (accumArray
        (\xs x -> xs ++ [x]) [] cs
        [(x2,(x1,p)) | (x1,x2,p) <- vs, x1 /= x2] ++
        [(x1,(x2,p)) | (x1,x2,p) <- vs])

```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `ejGrafoND` es el grafo que de la página 8. Por ejemplo,

```
ghci> ejGrafoND
G ND array (1,5) [(1, [(2,12), (3,34), (5,78)]),
                  (2, [(1,12), (4,55), (5,32)]),
                  (3, [(1,34), (4,61), (5,44)]),
                  (4, [(2,55), (3,61), (5,93)]),
                  (5, [(1,78), (2,32), (3,44), (4,93)])]
```

---

```
ejGrafoND = creaGrafo ND (1,5) [(1,2,12), (1,3,34), (1,5,78),
                                (2,4,55), (2,5,32),
                                (3,4,61), (3,5,44),
                                (4,5,93)]
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `ejGrafoD` es el mismo grafo que `ejGrafoND` pero orientando las aristas de menor a mayor. Por ejemplo,

```
ghci> ejGrafoD
G D array (1,5) [(1,[(2,12),(3,34),(5,78)]),
                 (2,[(4,55),(5,32)]),
                 (3,[(4,61),(5,44)]),
                 (4,[(5,93)]),
                 (5,[])])
```

---

```
ejGrafoD = creaGrafo D (1,5) [(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),
                              (2,4,55),(2,5,32),
                              (3,4,61),(3,5,44),
                              (4,5,93)]
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(dirigido g)` se verifica si `g` es dirigido. Por ejemplo,

```
dirigido ejGrafoD    == True
dirigido ejGrafoND  == False
```

---

```
dirigido :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> Bool
dirigido (G o _) = o == D
```

---

- `(adyacentes g v)` es la lista de los vértices adyacentes al nodo `v` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
adyacentes ejGrafoND 4 == [2,3,5]
adyacentes ejGrafoD  4 == [5]
```

---

```
adyacentes :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
adyacentes (G _ g) v = map fst (g!v)
```

---



## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(dirigido g)` se verifica si `g` es dirigido. Por ejemplo,

```
dirigido ejGrafoD == True
dirigido ejGrafoND == False
```

---

```
dirigido :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> Bool
dirigido (G o _) = o == D
```

---

- `(adyacentes g v)` es la lista de los vértices adyacentes al nodo `v` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
adyacentes ejGrafoND 4 == [2,3,5]
adyacentes ejGrafoD 4 == [5]
```

---

```
adyacentes :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
adyacentes (G _ g) v = map fst (g!v)
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- **(nodos g)** es la lista de todos los nodos del grafo g. Por ejemplo,

```
nodos ejGrafoND == [1,2,3,4,5]
nodos ejGrafoD  == [1,2,3,4,5]
```

---

```
nodos :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
nodos (G _ g) = indices g
```

---

- **(peso v1 v2 g)** es el peso de la arista que une los vértices v1 y v2 en el grafo g. Por ejemplo,

```
peso 1 5 ejGrafoND == 78
peso 1 5 ejGrafoD  == 78
```

---

```
peso :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
peso x y (G _ g) = head [c | (a,c) <- g!x , a == y]
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(nodos g)` es la lista de todos los nodos del grafo `g`. Por ejemplo,

```
nodos ejGrafoND == [1,2,3,4,5]
nodos ejGrafoD  == [1,2,3,4,5]
```

---

```
nodos :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
nodos (G _ g) = indices g
```

---

- `(peso v1 v2 g)` es el peso de la arista que une los vértices `v1` y `v2` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
peso 1 5 ejGrafoND == 78
peso 1 5 ejGrafoD  == 78
```

---

```
peso :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
peso x y (G _ g) = head [c | (a,c) <- g!x , a == y]
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(nodos g)` es la lista de todos los nodos del grafo `g`. Por ejemplo,

```
nodos ejGrafoND == [1,2,3,4,5]
nodos ejGrafoD  == [1,2,3,4,5]
```

---

```
nodos :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
nodos (G _ g) = indices g
```

---

- `(peso v1 v2 g)` es el peso de la arista que une los vértices `v1` y `v2` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
peso 1 5 ejGrafoND == 78
peso 1 5 ejGrafoD  == 78
```

---

```
peso :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
peso x y (G _ g) = head [c | (a,c) <- g!x , a == y]
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(aristaEn g a)` se verifica si `a` es una arista del grafo `g`. Por ejemplo,

```
aristaEn ejGrafoND (5,1) == True
aristaEn ejGrafoND (4,1) == False
aristaEn ejGrafoD (5,1) == False
aristaEn ejGrafoD (1,5) == True
```

---

```
aristaEn :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool
aristaEn g (x,y) = y `elem` adyacentes g x
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `aristaEn g a` se verifica si `a` es una arista del grafo `g`. Por ejemplo,

```
aristaEn ejGrafoND (5,1) == True
aristaEn ejGrafoND (4,1) == False
aristaEn ejGrafoD  (5,1) == False
aristaEn ejGrafoD  (1,5) == True
```

---

```
aristaEn :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool
aristaEn g (x,y) = y `elem` adyacentes g x
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(aristas g)` es la lista de las aristas del grafo `g`. Por ejemplo,

```
ghci> aristas ejGrafoND
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,1,12),(2,4,55),(2,5,32),
 (3,1,34),(3,4,61),(3,5,44),(4,2,55),(4,3,61),(4,5,93),
 (5,1,78),(5,2,32),(5,3,44),(5,4,93)]
ghci> aristas ejGrafoD
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,4,55),(2,5,32),(3,4,61),
 (3,5,44),(4,5,93)]
```

---

```
aristas :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
aristas (G o g) =
    [(v1,v2,w) | v1 <- nodos (G o g) , (v2,w) <- g!v1]
```

---

## Los grafos como vectores de adyacencia

- `(aristas g)` es la lista de las aristas del grafo `g`. Por ejemplo,

```
ghci> aristas ejGrafoND
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,1,12),(2,4,55),(2,5,32),
 (3,1,34),(3,4,61),(3,5,44),(4,2,55),(4,3,61),(4,5,93),
 (5,1,78),(5,2,32),(5,3,44),(5,4,93)]
ghci> aristas ejGrafoD
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,4,55),(2,5,32),(3,4,61),
 (3,5,44),(4,5,93)]
```

---

```
aristas :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
aristas (G o g) =
    [(v1,v2,w) | v1 <- nodos (G o g) , (v2,w) <- g!v1]
```

---



## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

### 1. El TAD de los grafos

Definiciones y terminología sobre grafos

Signatura del TAD de los grafos

Implementación de los grafos como vectores de adyacencia

Implementación de los grafos como matrices de adyacencia

### 2. Recorridos en profundidad y en anchura

### 3. Árboles de expansión mínimos

# Los grafos como matrices de adyacencia

## ► Cabecera del módulo.

---

```

module GrafoConMatrizDeAdyacencia
  (Orientacion (..),
   Grafo,
   creaGrafo,  -- (Ix v,Num p) => Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] ->
                --                               Grafo v p
   dirigido,   -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> Bool
   adyacentes, -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
   nodos,      -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> [v]
   aristas,    -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
   aristaEn,   -- (Ix v,Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool
   peso        -- (Ix v,Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
  ) where

```

---

## ► Librerías auxiliares

---

```
import Data.Array
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- ▶ **Orientacion** es D (dirigida) ó ND (no dirigida).

---

```
data Orientacion = D | ND
                deriving (Eq, Show)
```

---

- ▶ **(Grafo v p)** es un grafo con vértices de tipo v y pesos de tipo p.

---

```
data Grafo v p = G Orientacion (Array (v,v) (Maybe p))
                deriving (Eq, Show)
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `(creaGrafo o cs as)` es un grafo (dirigido o no, según el valor de `o`), con el par de cotas `cs` y listas de aristas `as` (cada arista es un trío formado por los dos vértices y su peso). Ver un ejemplo a continuación.

---

```
creaGrafo :: (Ix v, Num p) =>
    Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] -> (Grafo v p)
creaGrafo D cs as =
    G D (matrizVacia cs //
        [((v1,v2),Just c) | (v1,v2,c) <- as])
creaGrafo ND cs as =
    G ND (matrizVacia cs //
        [(((v1,v2),Just c) | (v1,v2,c) <- as) ++
         [((v2,v1),Just c) | (v1,v2,c) <- as, v1 /= v2]])

matrizVacia :: Ix v => (v,v) -> Array (v,v) (Maybe p)
matrizVacia (l,u) =
    listArray ((l,l),(u,u)) (repeat Nothing)
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `(creaGrafo o cs as)` es un grafo (dirigido o no, según el valor de `o`), con el par de cotas `cs` y listas de aristas `as` (cada arista es un trío formado por los dos vértices y su peso). Ver un ejemplo a continuación.

---

```
creaGrafo :: (Ix v, Num p) =>
    Orientacion -> (v,v) -> [(v,v,p)] -> (Grafo v p)
creaGrafo D cs as =
    G D (matrizVacia cs //
        [(v1,v2),Just c | (v1,v2,c) <- as])
creaGrafo ND cs as =
    G ND (matrizVacia cs //
        ([((v1,v2),Just c) | (v1,v2,c) <- as] ++
         [((v2,v1),Just c) | (v1,v2,c) <- as, v1 /= v2]))

matrizVacia :: Ix v => (v,v) -> Array (v,v) (Maybe p)
matrizVacia (l,u) =
    listArray ((l,l),(u,u)) (repeat Nothing)
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `ejGrafoND` es el grafo que de la página 8. Por ejemplo,

```
ghci> ejGrafoND
G ND array ((1,1),(5,5))
  [((1,1),Nothing),((1,2),Just 12),((1,3),Just 34),
    ((1,4),Nothing),((1,5),Just 78),((2,1),Just 12),
    ((2,2),Nothing),((2,3),Nothing),((2,4),Just 55),
    ((2,5),Just 32),((3,1),Just 34),((3,2),Nothing),
    ((3,3),Nothing),((3,4),Just 61),((3,5),Just 44),
    ((4,1),Nothing),((4,2),Just 55),((4,3),Just 61),
    ((4,4),Nothing),((4,5),Just 93),((5,1),Just 78),
    ((5,2),Just 32),((5,3),Just 44),((5,4),Just 93),
    ((5,5),Nothing)]
```

---

```
ejGrafoND = creaGrafo ND (1,5) [(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),
                                (2,4,55),(2,5,32),
                                (3,4,61),(3,5,44),
                                (4,5,93)]
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `ejGrafoD` es el mismo grafo que `ejGrafoND` pero orientando las aristas de menor a mayor. Por ejemplo,

```
ghci> ejGrafoD
G D (array ((1,1),(5,5))
      [((1,1),Nothing),((1,2),Just 12),((1,3),Just 34),
        ((1,4),Nothing),((1,5),Just 78),((2,1),Nothing),
        ((2,2),Nothing),((2,3),Nothing),((2,4),Just 55),
        ((2,5),Just 32),((3,1),Nothing),((3,2),Nothing),
        ((3,3),Nothing),((3,4),Just 61),((3,5),Just 44),
        ((4,1),Nothing),((4,2),Nothing),((4,3),Nothing),
        ((4,4),Nothing),((4,5),Just 93),((5,1),Nothing),
        ((5,2),Nothing),((5,3),Nothing),((5,4),Nothing),
        ((5,5),Nothing)])
```

---

```
ejGrafoD = creaGrafo D (1,5) [(1,2,12), (1,3,34), (1,5,78),
                              (2,4,55), (2,5,32),
                              (3,4,61), (3,5,44),
                              (4,5,93)]
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `(dirigido g)` se verifica si `g` es dirigido. Por ejemplo,

```
dirigido ejGrafoD == True
dirigido ejGrafoND == False
```

---

```
dirigido :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> Bool
dirigido (G o _) = o == D
```

---

- `(adyacentes g v)` es la lista de los vértices adyacentes al nodo `v` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
adyacentes ejGrafoND 4 == [2,3,5]
adyacentes ejGrafoD 4 == [5]
```

---

```
adyacentes :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
adyacentes (G o g) v =
    [v' | v' <- nodos (G o g), (g!(v,v')) /= Nothing]
```

---



## Los grafos como matrices de adyacencia

- `(dirigido g)` se verifica si `g` es dirigido. Por ejemplo,

```
dirigido ejGrafoD == True
dirigido ejGrafoND == False
```

---

```
dirigido :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> Bool
dirigido (G o _) = o == D
```

---

- `(adyacentes g v)` es la lista de los vértices adyacentes al nodo `v` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
adyacentes ejGrafoND 4 == [2,3,5]
adyacentes ejGrafoD 4 == [5]
```

---

```
adyacentes :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> v -> [v]
adyacentes (G o g) v =
    [v' | v' <- nodos (G o g), (g!(v,v')) /= Nothing]
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- **(nodos g)** es la lista de todos los nodos del grafo g. Por ejemplo,

```
nodos ejGrafoND == [1,2,3,4,5]
nodos ejGrafoD  == [1,2,3,4,5]
```

---

```
nodos :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
nodos (G _ g) = range (l,u)
              where ((l,_),(u,_)) = bounds g
```

---

- **(peso v1 v2 g)** es el peso de la arista que une los vértices v1 y v2 en el grafo g. Por ejemplo,

```
peso 1 5 ejGrafoND == 78
peso 1 5 ejGrafoD  == 78
```

---

```
peso :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
peso x y (G _ g) = w where (Just w) = g!(x,y)
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- **(nodos g)** es la lista de todos los nodos del grafo g. Por ejemplo,

```
nodos ejGrafoND == [1,2,3,4,5]
nodos ejGrafoD  == [1,2,3,4,5]
```

---

```
nodos :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
```

```
nodos (G _ g) = range (1,u)
```

```
  where ((1,_),(u,_)) = bounds g
```

- **(peso v1 v2 g)** es el peso de la arista que une los vértices v1 y v2 en el grafo g. Por ejemplo,

```
peso 1 5 ejGrafoND == 78
peso 1 5 ejGrafoD  == 78
```

---

```
peso :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
```

```
peso x y (G _ g) = w where (Just w) = g!(x,y)
```

## Los grafos como matrices de adyacencia

- ▶ `(nodos g)` es la lista de todos los nodos del grafo `g`. Por ejemplo,

```
nodos ejGrafoND == [1,2,3,4,5]
nodos ejGrafoD  == [1,2,3,4,5]
```

---

```
nodos :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [v]
nodos (G _ g) = range (1,u)
              where ((1,_),(u,_)) = bounds g
```

---

- ▶ `(peso v1 v2 g)` es el peso de la arista que une los vértices `v1` y `v2` en el grafo `g`. Por ejemplo,

```
peso 1 5 ejGrafoND == 78
peso 1 5 ejGrafoD  == 78
```

---

```
peso :: (Ix v, Num p) => v -> v -> (Grafo v p) -> p
peso x y (G _ g) = w where (Just w) = g!(x,y)
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- ▶ `(aristaEn g a)` se verifica si `a` es una arista del grafo `g`. Por ejemplo,

```
| aristaEn ejGrafoND (5,1) == True  
| aristaEn ejGrafoND (4,1) == False
```

---

```
aristaEn :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool  
aristaEn (G _o g) (x,y) = (g!(x,y)) /= Nothing
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `aristaEn g a` se verifica si `a` es una arista del grafo `g`. Por ejemplo,

```
aristaEn ejGrafoND (5,1) == True
aristaEn ejGrafoND (4,1) == False
```

---

```
aristaEn :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> (v,v) -> Bool
aristaEn (G _o g) (x,y) = (g!(x,y)) /= Nothing
```

---

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `(aristas g)` es la lista de las aristas del grafo `g`. Por ejemplo,

```
ghci> aristas ejGrafoD
```

```
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,4,55),(2,5,32),(3,4,61),
 (3,5,44),(4,5,93)]
```

```
ghci> aristas ejGrafoND
```

```
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,1,12),(2,4,55),(2,5,32),
 (3,1,34),(3,4,61),(3,5,44),(4,2,55),(4,3,61),(4,5,93),
 (5,1,78),(5,2,32),(5,3,44),(5,4,93)]
```

---

```
aristas :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
```

```
aristas g@(G o e) = [(v1,v2,extrae(e!(v1,v2)))
```

```
    | v1 <- nodos g,
```

```
    v2 <- nodos g,
```

```
    aristaEn g (v1,v2)]
```

```
  where extrae (Just w) = w
```

## Los grafos como matrices de adyacencia

- `(aristas g)` es la lista de las aristas del grafo `g`. Por ejemplo,

```
ghci> aristas ejGrafoD
```

```
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,4,55),(2,5,32),(3,4,61),
 (3,5,44),(4,5,93)]
```

```
ghci> aristas ejGrafoND
```

```
[(1,2,12),(1,3,34),(1,5,78),(2,1,12),(2,4,55),(2,5,32),
 (3,1,34),(3,4,61),(3,5,44),(4,2,55),(4,3,61),(4,5,93),
 (5,1,78),(5,2,32),(5,3,44),(5,4,93)]
```

---

```
aristas :: (Ix v, Num p) => (Grafo v p) -> [(v,v,p)]
```

```
aristas g@(G o e) = [(v1,v2,extrae(e!(v1,v2)))
```

```
    | v1 <- nodos g,
```

```
      v2 <- nodos g,
```

```
      aristaEn g (v1,v2)]
```

```
  where extrae (Just w) = w
```



## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

1. El TAD de los grafos
2. Recorridos en profundidad y en anchura
  - Recorrido en profundidad
  - Recorrido en anchura
3. Árboles de expansión mínimos

## Recorrido en profundidad

- ▶ Importaciones de librerías auxiliares.

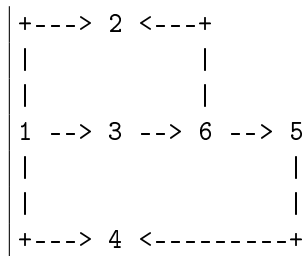
---

```
-- Nota: Elegir una implementación de los grafos.  
import GrafoConVectorDeAdyacencia  
-- import GrafoConMatrizDeAdyacencia
```

---

## Recorrido en profundidad

- ▶ En los ejemplos se usará el grafo  $g$



que se define por

---

```

g = creaGrafo D (1,6)
              [(1,2,0), (1,3,0), (1,4,0), (3,6,0),
              (5,4,0), (6,2,0), (6,5,0)]
  
```

---

## Procedimiento elemental de recorrido en profundidad

- `(recorridoEnProfundidad i g)` es el recorrido en profundidad del grafo  $g$  desde el vértice  $i$ . Por ejemplo,

```
| recorridoEnProfundidad 1 g == [1,2,3,6,5,4]
```

---

```
recorridoEnProfundidad i g = rp [i] []
  where
    rp [] vis      = vis
    rp (c:cs) vis
      | c `elem` vis = rp cs vis
      | otherwise   = rp ((adyacentes g c)++cs)
                       (vis++[c])
```

---

## Procedimiento elemental de recorrido en profundidad

- `(recorridoEnProfundidad i g)` es el recorrido en profundidad del grafo  $g$  desde el vértice  $i$ . Por ejemplo,

```
| recorridoEnProfundidad 1 g == [1,2,3,6,5,4]
```

---

```
recorridoEnProfundidad i g = rp [i] []  
  where  
    rp [] vis      = vis  
    rp (c:cs) vis  
      | c 'elem' vis = rp cs vis  
      | otherwise   = rp ((adyacentes g c)++cs)  
                        (vis++[c])
```

---

## Procedimiento elemental de recorrido en profundidad

- Traza del cálculo de (recorridoEnProfundidad 1 g)

```
recorridoEnProfundidad 1 g
= rp [1]      []
= rp [2,3,4]  [1]
= rp [3,4]    [1,2]
= rp [6,4]    [1,2,3]
= rp [2,5,4]  [1,2,3,6]
= rp [5,4]    [1,2,3,6]
= rp [4,4]    [1,2,3,6,5]
= rp [4]      [1,2,3,6,5,4]
= rp []       [1,2,3,6,5,4]
= [1,2,3,6,5,4]
```

## Recorrido en profundidad con acumuladores

- `(recorridoEnProfundidad' i g)` es el recorrido en profundidad del grafo, usando la lista de los visitados como acumulador. Por ejemplo,

```
|recorridoEnProfundidad' 1 g == [1,2,3,6,5,4]
```

---

```
recorridoEnProfundidad' i g = reverse (rp [i] [])
  where
    rp [] vis      = vis
    rp (c:cs) vis
      | c `elem` vis = rp cs vis
      | otherwise   = rp ((adyacentes g c)++cs)
                       (c:vis)
```

---

## Recorrido en profundidad con acumuladores

- `(recorridoEnProfundidad' i g)` es el recorrido en profundidad del grafo, usando la lista de los visitados como acumulador. Por ejemplo,

```
| recorridoEnProfundidad' 1 g == [1,2,3,6,5,4]
```

---

```
recorridoEnProfundidad' i g = reverse (rp [i] [])
```

```
  where
```

```
    rp [] vis      = vis
```

```
    rp (c:cs) vis
```

```
      | c 'elem' vis = rp cs vis
```

```
      | otherwise   = rp ((adyacentes g c)++cs)
                       (c:vis)
```

---



## Recorrido en profundidad con acumuladores

- Traza del cálculo de (recorridoEnProfundidad' 1 g)

```
recorridoEnProfundidad' 1 g
= reverse (rp [1]      [])
= reverse (rp [2,3,4] [1])
= reverse (rp [3,4]   [2,1])
= reverse (rp [6,4]   [3,2,1])
= reverse (rp [2,5,4] [6,3,2,1])
= reverse (rp [5,4]   [6,3,2,1])
= reverse (rp [4,4]   [5,6,3,2,1])
= reverse (rp [4]     [4,5,6,3,2,1])
= reverse (rp []      [4,5,6,3,2,1])
= reverse [4,5,6,3,2,1]
= [1,2,3,6,5,4]
```

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

1. El TAD de los grafos
2. Recorridos en profundidad y en anchura
  - Recorrido en profundidad
  - Recorrido en anchura
3. Árboles de expansión mínimos

## Recorrido en anchura

- ▶ Importaciones de librerías auxiliares.

---

```
-- Nota: Elegir una implementación de los grafos.  
import GrafoConVectorDeAdyacencia  
-- import GrafoConMatrizDeAdyacencia
```

---

## Procedimiento elemental de recorrido en anchura

- `(recorridoEnAnchura i g)` es el recorrido en anchura del grafo `g` desde el vértice `i`. Por ejemplo,

```
| recorridoEnAnchura 1 g == [1,4,3,2,6,5]
```

---

```
recorridoEnAnchura i g = reverse (ra [i] [])
  where
    ra [] vis      = vis
    ra (c:cs) vis
      | c `elem` vis = ra cs vis
      | otherwise   = ra (cs ++ adyacentes g c)
                      (c:vis)
```

---

## Procedimiento elemental de recorrido en anchura

- `(recorridoEnAnchura i g)` es el recorrido en anchura del grafo `g` desde el vértice `i`. Por ejemplo,

```
| recorridoEnAnchura 1 g == [1,4,3,2,6,5]
```

---

```
recorridoEnAnchura i g = reverse (ra [i] [])
```

```
  where
```

```
    ra [] vis    = vis
```

```
    ra (c:cs) vis
```

```
      | c 'elem' vis = ra cs vis
```

```
      | otherwise   = ra (cs ++ adyacentes g c)
                       (c:vis)
```

---

## Procedimiento elemental de recorrido en anchura

- Traza del cálculo de (recorridoEnAnchura 1 g)

```
RecorridoEnAnchura 1 g
= ra [1]      []
= ra [2,3,4] [1]
= ra [3,4]    [2,1]
= ra [4,6]    [3,2,1]
= ra [6]      [4,3,2,1]
= ra [2,5]    [6,4,3,2,1]
= ra [5]      [6,4,3,2,1]
= ra [4]      [5,6,4,3,2,1]
= ra []       [5,6,4,3,2,1]
= [1,2,3,4,6,5]
```

- └ Árboles de expansión mínimos
- └ Árboles de expansión mínimos

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

1. El TAD de los grafos
2. Recorridos en profundidad y en anchura
3. Árboles de expansión mínimos
  - Árboles de expansión mínimos
  - El algoritmo de Kruskal
  - El algoritmo de Prim

## Árboles de expansión mínimos

- ▶ Sea  $G = (V, A)$  un grafo conexo no orientado en el que cada arista tiene un peso no negativo. Un **árbol de expansión mínimo** de  $G$  es un subgrafo  $G' = (V, A')$  que conecta todos los vértices de  $G$  y tal que la suma de sus pesos es mínima.
- ▶ **Aplicación:** Si los vértices representan ciudades y el coste de una arista  $\{a, b\}$  es el construir una carretera de  $a$  a  $b$ , entonces un árbol de expansión mínimo representa el modo de enlazar todas las ciudades mediante una red de carreteras de coste mínimo.



## Árboles de expansión mínimos

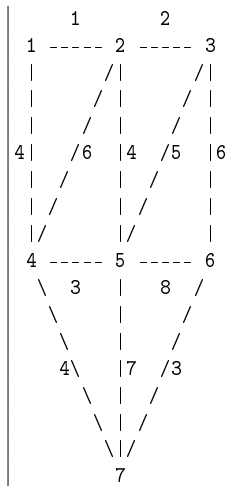
- ▶ Terminología de algoritmos voraces: Sea  $G = (V, A)$  un grafo y  $T$  un conjunto de aristas de  $G$ .
  - ▶  $T$  es una **solución** si es un grafo de expansión.
  - ▶  $T$  es **completable** si no tiene ciclos.
  - ▶  $T$  es **prometedor** si es completable y puede ser completado hasta llegar a una solución óptima.
  - ▶ Una arista **toca** un conjunto de vértices  $B$  si exactamente uno de sus extremos pertenece a  $B$ .
- ▶ **Teorema:** Sea  $G = (V, A)$  un grafo conexo no orientado cuyas aristas tienen un peso asociado. Sea  $B$  un subconjunto propio del conjunto de vértices  $V$  y  $T$  un conjunto prometedor de aristas tal que ninguna arista de  $T$  toca a  $B$ . Sea  $e$  una arista de peso mínimo de entre todas las que tocan a  $B$ . Entonces  $(T \cup \{e\})$  es prometedor.

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

1. El TAD de los grafos
2. Recorridos en profundidad y en anchura
3. Árboles de expansión mínimos
  - Árboles de expansión mínimos
  - El algoritmo de Kruskal**
  - El algoritmo de Prim

# El algoritmo de Kruskal

Para los ejemplos se considera el siguiente grafo:



## El algoritmo de Kruskal

- Aplicación del algoritmo de Kruskal al grafo anterior:

Etapa	Arista	Componentes conexas
0		{1} {2} {3} {4} {5} {6} {7}
1	{1,2}	{1,2} {3} {4} {5} {6} {7}
2	{2,3}	{1,2,3} {4} {5} {6} {7}
3	{4,5}	{1,2,3} {4,5} {6} {7}
4	{6,7}	{1,2,3} {4,5} {6,7}
5	{1,4}	{1,2,3,4,5} {6,7}
6	{2,5}	arista rechazada
7	{4,7}	{1,2,3,4,5,6,7}

- El árbol de expansión mínimo contiene las aristas no rechazadas:

{1,2}, {2,3}, {4,5}, {6,7}, {1,4} y {4,7}.

# El algoritmo de Kruskal

► Librerías auxiliares.

---

```
-- Nota: Seleccionar una implementación del TAD grafo.  
import GrafoConVectorDeAdyacencia  
-- import GrafoConMatrizDeAdyacencia  
  
-- Nota: Seleccionar una implementación del TAD tabla.  
-- import TablaConFunciones  
import TablaConListasDeAsociacion  
-- import TablaConMatrices  
  
import Data.List  
import Data.Ix
```

---

## El algoritmo de Kruskal

- Grafos usados en los ejemplos.

---

```
g1 :: Grafo Int Int
g1 = creaGrafo D (1,5) [(1,2,12), (1,3,34), (1,5,78),
                        (2,4,55), (2,5,32),
                        (3,4,61), (3,5,44),
                        (4,5,93)]
```

```
g2 :: Grafo Int Int
g2 = creaGrafo D (1,5) [(1,2,13), (1,3,11), (1,5,78),
                        (2,4,12), (2,5,32),
                        (3,4,14), (3,5,44),
                        (4,5,93)]
```

---

## El algoritmo de Kruskal

- `(kruskal g)` es el árbol de expansión mínimo del grafo `g` calculado mediante el algoritmo de Kruskal. Por ejemplo,

```
kruskal g1 == [(55,2,4), (34,1,3), (32,2,5), (12,1,2)]
kruskal g2 == [(32,2,5), (13,1,2), (12,2,4), (11,1,3)]
```

---

```
kruskal :: (Ix v, Num p, Ord p) => Grafo v p -> [(p,v,v)]
kruskal g = kruskal' cola
            (tabla [(x,x) | x <- nodos g]) -- Cola de prioridad
            []                             -- Tabla de raices
            ((length (nodos g)) - 1)      -- Árbol de expansión
            -- Aristas por
            -- colocar

    where cola = sort [(p,x,y) | (x,y,p) <- aristas g]

kruskal' ((p,x,y):as) t ae n
  | n==0      = ae
  | actualizado = kruskal' as t' ((p,x,y):ae) (n-1)
  | otherwise  = kruskal' as t  ae          n
  where (actualizado,t') = buscaActualiza (x,y) t
```

---

## El algoritmo de Kruskal

- `(kruskal g)` es el árbol de expansión mínimo del grafo `g` calculado mediante el algoritmo de Kruskal. Por ejemplo,

```
kruskal g1 == [(55,2,4), (34,1,3), (32,2,5), (12,1,2)]
kruskal g2 == [(32,2,5), (13,1,2), (12,2,4), (11,1,3)]
```

---

```
kruskal :: (Ix v, Num p, Ord p) => Grafo v p -> [(p,v,v)]
kruskal g = kruskal' cola
            (tabla [(x,x) | x <- nodos g]) -- Cola de prioridad
            []                             -- Tabla de raices
            ((length (nodos g)) - 1)      -- Árbol de expansión
            -- Aristas por
            -- colocar

    where cola = sort [(p,x,y) | (x,y,p) <- aristas g]

kruskal' ((p,x,y):as) t ae n
  | n==0      = ae
  | actualizado = kruskal' as t' ((p,x,y):ae) (n-1)
  | otherwise  = kruskal' as t ae n
  where (actualizado,t') = buscaActualiza (x,y) t
```

---



## El algoritmo de Kruskal

- `(raiz t n)` es la raíz de `n` en la tabla `t`. Por ejemplo,

```
> raiz (crea [(1,1), (3,1), (4,3), (5,4), (2,6), (6,6)]) 5
1
> raiz (crea [(1,1), (3,1), (4,3), (5,4), (2,6), (6,6)]) 2
6
```

---

```
raiz :: Eq n => Tabla n n -> n -> n
raiz t x | v == x      = v
         | otherwise = raiz t v
         where v = valor t x
```

---

## El algoritmo de Kruskal

- `(raiz t n)` es la raíz de `n` en la tabla `t`. Por ejemplo,

```
> raiz (crea [(1,1), (3,1), (4,3), (5,4), (2,6), (6,6)]) 5
1
> raiz (crea [(1,1), (3,1), (4,3), (5,4), (2,6), (6,6)]) 2
6
```

---

```
raiz :: Eq n => Tabla n n -> n -> n
```

```
raiz t x | v == x    = v
         | otherwise = raiz t v
where v = valor t x
```

---

## El algoritmo de Kruskal

- `(buscaActualiza a t)` es el par formado por `False` y la tabla `t`, si los dos vértices de la arista `a` tienen la misma raíz en `t` y el par formado por `True` y la tabla obtenida añadiéndole a `t` la arista formada por el vértice de `a` de mayor raíz y la raíz del vértice de `a` de menor raíz. Por ejemplo,

```
ghci> let t = crea [(1,1),(2,2),(3,1),(4,1)]
ghci> buscaActualiza (2,3) t
(True,Tbl [(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)])
ghci> buscaActualiza (3,4) t
(False,Tbl [(1,1),(2,2),(3,1),(4,1)])
```

---

```
buscaActualiza :: (Eq n, Ord n) => (n,n) -> Tabla n n
                -> (Bool,Tabla n n)
```

```
buscaActualiza (x,y) t
  | x' == y' = (False, t)
  | y' < x' = (True, modifica (x,y') t)
  | otherwise = (True, modifica (y,x') t)
  where x' = raiz t x
        y' = raiz t y
```

---

## El algoritmo de Kruskal

- (`buscaActualiza a t`) es el par formado por `False` y la tabla `t`, si los dos vértices de la arista `a` tienen la misma raíz en `t` y el par formado por `True` y la tabla obtenida añadiéndole a `t` la arista formada por el vértice de `a` de mayor raíz y la raíz del vértice de `a` de menor raíz. Por ejemplo,

```
ghci> let t = crea [(1,1),(2,2),(3,1),(4,1)]
ghci> buscaActualiza (2,3) t
(True,Tbl [(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)])
ghci> buscaActualiza (3,4) t
(False,Tbl [(1,1),(2,2),(3,1),(4,1)])
```

---

```
buscaActualiza :: (Eq n, Ord n) => (n,n) -> Tabla n n
                -> (Bool,Tabla n n)
```

```
buscaActualiza (x,y) t
  | x' == y' = (False, t)
  | y' < x'  = (True, modifica (x,y') t)
  | otherwise = (True, modifica (y,x') t)
  where x' = raiz t x
        y' = raiz t y
```

---

## Tema 22: Algoritmos sobre grafos

1. El TAD de los grafos
2. Recorridos en profundidad y en anchura
3. Árboles de expansión mínimos
  - Árboles de expansión mínimos
  - El algoritmo de Kruskal
  - El algoritmo de Prim

## El algoritmo de Prim

- `(prim g)` es el árbol de expansión mínimo del grafo `g` calculado mediante el algoritmo de Prim. Por ejemplo,

```
prim g1 == [(55,2,4), (34,1,3), (32,2,5), (12,1,2)]
prim g2 == [(32,2,5), (12,2,4), (13,1,2), (11,1,3)]
```

---

```
prim :: (Ix v, Num p, Ord p) => Grafo v p -> [(p,v,v)]
prim g = prim' [n]          -- Nodos colocados
          ns                -- Nodos por colocar
          []                -- Árbol de expansión
          (aristas g)      -- Aristas del grafo
          where (n:ns) = nodos g
```

```
prim' t [] ae as = ae
prim' t r ae as = prim' (v':t) (delete v' r) (e:ae) as
  where e@(c,u', v') = minimum [(c,u,v) | (u,v,c) <- as,
                                         elem u t,
                                         elem v r]
```

---

## El algoritmo de Prim

- `(prim g)` es el árbol de expansión mínimo del grafo `g` calculado mediante el algoritmo de Prim. Por ejemplo,

```
prim g1 == [(55,2,4), (34,1,3), (32,2,5), (12,1,2)]
prim g2 == [(32,2,5), (12,2,4), (13,1,2), (11,1,3)]
```

---

```
prim :: (Ix v, Num p, Ord p) => Grafo v p -> [(p,v,v)]
prim g = prim' [n]          -- Nodos colocados
          ns                -- Nodos por colocar
          []                -- Árbol de expansión
          (aristas g)       -- Aristas del grafo
          where (n:ns) = nodos g
```

```
prim' t [] ae as = ae
prim' t r ae as = prim' (v':t) (delete v' r) (e:ae) as
  where e@(c,u', v') = minimum [(c,u,v) | (u,v,c) <- as,
                                         elem u t,
                                         elem v r]
```

---