Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica

- **Objetivos** de la lógica:
  - La formalización del lenguaje natural.
  - Los métodos de razonamiento.
- **Sistemas** lógicos:
  - Lógica proposicional.
  - Lógica de primer orden.
  - Lógicas modales.
- **Aplicaciones** de la lógica en computación:
  - Programación lógica.
  - Verificación y síntesis automática de programas.
  - Representación del conocimiento y razonamiento.
  - Modelización y razonamiento sobre sistemas.

Argumentos y formalización

- **Ejemplos de argumentos:**
  - **Ejemplo 1:** ***Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7.*** **Por tanto**, ***habían taxis en la estación.***
  - **Ejemplo 2:** ***Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente.*** **Por tanto**, ***la lámpara está fundida.***
- **Formalización:**
  -

Símbolo	Ejemplo 1	Ejemplo 2
p	"el tren llega a las 7"	"hay corriente"
q	"hay taxis en la estación"	"la lámpara está fundida"
r	"Juan llega tarde a la reunión"	"la lámpara está encendida"

  - **Si p y no q, entonces r. No r. p. Por tanto, q.**
  - $p \land \neg q \to r, \neg r, p \models q$.

Sintaxis proposicional: Fórmulas proposicionales

- **Alfabeto proposicional:**
  - variables proposicionales: $p, q, r, p_0, p_1, \ldots$
  - conectivas lógicas:
    - monaria: $\neg$ (negación),
    - binarias: $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bicondicional).
  - símbolos auxiliares: "(" y ")".

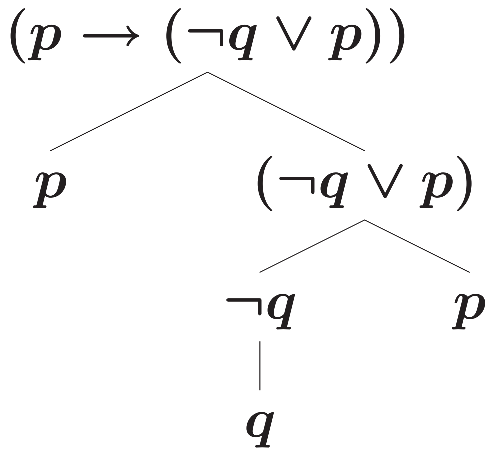
- **Fórmulas proposicionales:**
  - Definición:
    - Las variables proposicionales son fórmulas.
    - Si F y G son fórmulas, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas.
  - Ejemplos:
    - Fórmulas: p, $\quad (p \vee \neg q)$, $\quad \neg(p \vee p)$, $\quad ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$
    - No fórmulas: (p), $\quad p \vee \neg q$, $\quad (p \vee \wedge q)$

Sintaxis proposicional: Fórmulas proposicionales (BNF)

- **Notaciones:**
  - $p, q, r, \ldots$ **representarán variables proposicionales.**
  - $F, G, H, \ldots$ **representarán fórmulas.**
  - VP **representa el conjunto de los variables proposicionales.**
  - Prop **representa el conjunto de las fórmulas.**
  - $*$ **representa una conectiva binaria.**
- **Forma de Backus Naur (BNF) de las fórmula proposicionales:**
  - $F ::= p \mid \neg G \mid (F \wedge G) \mid (F \vee G) \mid (F \rightarrow G) \mid (F \leftrightarrow G)$

Sintaxis proposicional: Árboles de análisis

- **Árboles de análisis (o de formación).**



Sintaxis proposicional: Omisión de paréntesis

- **Criterios de reducción de paréntesis:**
  - **Pueden eliminarse los paréntesis externos.**

    $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$.
  - **Precedencia de asociación de conectivas:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

    $F \wedge G \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge G) \rightarrow (\neg F \vee G))$.
  - **Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.**

    $F \vee G \vee H$ es una abreviatura de $(F \vee (G \vee H))$.

    $F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow (\neg F \vee G))$.

Sintaxis proposicional: Subfórmulas

- **Subfórmulas:**
  - **Def:** El conjunto de las subfórmulas de F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una variable;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$

  - **Ejemplos:**

1. $\text{Subf}(p) = \{p\}$
2. $\text{Subf}(q) = \{q\}$
3. $\text{Subf}(\neg q) = \{\neg q, q\}$
4. $\text{Subf}(\neg q \lor p) = \{\neg q \lor p, \neg q, q, p\}$
5. $\text{Subf}(p \to \neg q \lor p) = \{p \to \neg q \lor p, p, \neg q \lor p, \neg q, q\}$

Semántica proposicional: valores y funciones de verdad

- **Valores de verdad:** ($\mathbb{B}$):
  - **1**: verdadero.
  - **0**: falso.
- **Funciones de verdad**:
  - $H_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ t.q. $H_\neg(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$
  - $H_\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\wedge(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\vee(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\to : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\to(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\leftrightarrow(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Semántica proposicional: valoración de fórmulas

- **Funciones de verdad mediante tablas de verdad:**

i	$\neg i$
1	0
0	1

i	j	$i \wedge j$	$i \vee j$	$i \to j$	$i \leftrightarrow j$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- **Valoración de verdad:**
  - Def.: v es una valoración de verdad si es una aplicación de VP en $\mathbb{B}$.
  - Prop: Para cada valoración de verdad v existe una única aplicación $\hat{v} : \text{PROP} \to \mathbb{B}$ tal que:

$$\hat{v}(F) = \begin{cases} v(F), & \text{si } F \text{ es una variable;} \\ H_{\neg}(\hat{v}(G)), & \text{si } F = \neg G; \\ H_{*}(\hat{v}(G), \hat{v}(H)), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$

  Se dice que $\hat{v}(F)$ es el valor de verdad de F respecto de v.

Semántica proposicional: valoración de fórmulas

- Ejemplo: Sea $F = (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
  - valor de F en una valoración v_1 tal que $v_1(p) = v_1(r) = 1, v_1(q) = 0$

$$
\begin{array}{cccccccc}
(p & \lor & q) & \land & (\neg q & \lor & r) \\
(1 & \lor & 0) & \land & (\neg 0 & \lor & 1) \\
 & 1 & & \land & (1 & \lor & 1) \\
 & 1 & & \land & & 1 & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

  - valor de F en una valoración v_2 tal que $v_2(r) = 1, v_2(p) = v_2(q) = 0$

$$
\begin{array}{cccccccc}
(p & \lor & q) & \land & (\neg q & \lor & r) \\
(0 & \lor & 0) & \land & (\neg 0 & \lor & 1) \\
 & 0 & & \land & (1 & \lor & 1) \\
 & 0 & & \land & & 1 & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

- Prop.: Sea F una fórmula y v, v' dos valoraciones. Si $v(p) = v'(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $\hat{v}(F) = \widehat{v'}(F)$.
- Notación: Se escribe $v(F)$ en lugar de $\hat{v}(F)$.

Semántica proposicional: modelos y satisfacibilidad

- **Modelo de una fórmula:**
  - Def.: v es modelo de F si $v(F) = 1$.
  - Notación: $v \models F$.
  - Ejemplo (continuación del anterior):
    – si $v_1(p) = v_1(r) = 1, v_1(q) = 0$, entonces $v_1 \models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$
    – si $v_2(r) = 1, v_2(p) = v_2(q) = 0$, entonces $v_2 \not\models (p \lor q) \land (\neg q \lor r)$

- **Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles:**
  - Def.: F es satisfacible si F tiene algún modelo.
  - Ejemplo: $(p \to q) \land (q \to r)$ es satisfacible.
    $v(p) = v(q) = v(r) = 0$
  - Def.: F es insatisfacible si F no tiene ningún modelo.
  - Ejemplo: $p \land \neg p$ es insatisfacible.

p	$\neg p$	$p \land \neg p$
1	0	0
0	1	0

Semántica proposicional: tautologías y contradicciones

- **Tautologías y contradicciones:**
  - Def.: F es una tautología (o válida) si toda valoración es modelo de F.
    Se representa por $\models F$.
  - Def.: F es una contradicción si ninguna valoración es modelo de F.
  - Def.: F es contingente si no es tautología ni contradicción.
  - Ejemplos:
    1. $(p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)$ es una tautología.
    2. $(p \rightarrow q) \land \neg(p \rightarrow q)$ es una contradicción.
    3. $p \rightarrow q$ es contingente.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p)$	$\neg(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \land \neg(p \rightarrow q)$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Semántica proposicional: Clasificaciones de fórmulas

- Clasificaciones de fórmulas:

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Todas las fórmulas</td></tr>
<tr><td>Tautologías</td><td>Contigentes</td><td>Contradicciones</td></tr>
<tr><td>Verdadera en todas las valoraciones

(ej. $p \lor \neg p$)</td><td>Verdadera en algunas valoraciones y falsa en otras

(ej. $p \rightarrow q$)</td><td>Falsa en todas las valoraciones

(ej. $p \land \neg p$)</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Safisfacibles</td><td>Insatisfacibles</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Todas las fórmulas</td></tr>
</table>

Semántica proposicional: Satisfacibilidad y tautologicidad

- **Los problemas SAT y TAUT:**
  - **Problema SAT**: Dada F determinar si es satisfacible.
  - **Problema TAUT**: Dada F determinar si es una tautología.
- **Relaciones entre satisfacibilidad y tautologicidad:**
  - F es tautología $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
  - F es tautología $\implies$ F es satisfacible.
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.

    $p \rightarrow q$ es satisfacible.
    $v(p) = v(q) = 1$

    $\neg(p \rightarrow q)$ es satisfacible.
    $v(p) = 1, v(q) = 0$

Semántica proposicional: Algoritmos para SAT y TAUT

- **Tablas de verdad** para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

p	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

- **Método de Quine** para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
			0			
	0				0	
				1		0
0		1				
	1					

- **Método de Quine** para $\models (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
	$1*$					

Semántica proposicional: Algoritmos para SAT y TAUT

- **Tablas de verdad** para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$:

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(q \leftrightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

- **Método de Quine** para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$:

$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1

Semántica proposicional: selección de tautologías

- **Selección de tautologías:**
  - 1. $F \rightarrow F$ (ley de identidad).
  - 2. $F \vee \neg F$ (ley del tercio excluso).
  - 3. $\neg(F \wedge \neg F)$ (principio de no contradicción).
  - 4. $(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$ (ley de Clavius).
  - 5. $\neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$ (ley de Duns Scoto).
  - 6. $((F \rightarrow G) \rightarrow F) \rightarrow F$ (ley de Peirce).
  - 7. $(F \rightarrow G) \wedge F \rightarrow G$ (modus ponens).
  - 8. $(F \rightarrow G) \wedge \neg G \rightarrow \neg F$ (modus tollens).

Semántica proposicional: Modelo de conjuntos de fórmulas

- **Notación:**
  - $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- **Modelo de un conjunto de fórmulas:**
  - Def.: v es modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $v \models F$.
  - Representación: $v \models S$.
  - Ejemplo: Sea $S = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), q \to r\}$

    La valoración v_1 tal que $v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1$ es modelo de S $(v_1 \models S)$.

    $$\begin{array}{cccccccccccc} \{(p & \lor & q) & \land & (\neg & q & \lor & r), & & q & \to & r\} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

    La valoración v_2 tal que $v_2(p) = 0, v_2(q) = 1, v_2(r) = 0$ no es modelo de S $(v_2 \not\models S)$.

    $$\begin{array}{cccccccccccc} \{(p & \lor & q) & \land & (\neg & q & \lor & r), & & q & \to & r\} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Semántica proposicional: Consistencia

- **Conjunto consistente de fórmulas:**
  - Def.: S es consistente si S tiene algún modelo.
  - Def.: S es inconsistente si S no tiene ningún modelo.
  - Ejemplos:
    - $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r\}$ es consistente (con modelos v_4, v_6, v_8)
    - $\{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \rightarrow r, \neg r\}$ es inconsistente

	p	q	r	$(p \vee q)$	$(\neg q \vee r)$	$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$	$p \rightarrow r$	$\neg r$
v_1	0	0	0	0	1	0	1	1
v_2	0	0	1	0	1	0	1	0
v_3	0	1	0	1	0	0	1	1
v_4	0	1	1	1	1	1	1	0
v_5	1	0	0	1	1	1	0	1
v_6	1	0	1	1	1	1	1	0
v_7	1	1	0	1	0	0	0	1
v_8	1	1	1	1	1	1	1	0

Semántica proposicional: Consecuencia lógica

- Def.: F es consecuencia de S si todos los modelos de S son modelos de F.
- Representación: $S \models F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$

	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
v_1	0	0	0	1	1	1
v_2	0	0	1	1	1	1
v_3	0	1	0	1	0	1
v_4	0	1	1	1	1	1
v_5	1	0	0	0	1	0
v_6	1	0	1	0	1	1
v_7	1	1	0	1	0	0
v_8	1	1	1	1	1	1

- Ejemplo: $\{p\} \not\models p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Semántica: propiedades de la consecuencia

- **Propiedades básicas de la relación de consecuencia:**
  - Reflexividad: $S \models S$.
  - Monotonía: Si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
  - Transitividad: Si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.
- **Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia:**
  - Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
    2. $\models F_1 \wedge \dots \wedge F_n \to G$.
    3. $\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \to G)$ es insatisfacible.
    4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.

Semántica proposicional: argumentaciones

- **Ejemplo de argumentación:**
  - **Problema de los animales:** Se sabe que
    1. Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.
    2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
    3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
    4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

    Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.
  - **Formalización:**

$$
\begin{array}{l}
\{\ \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \rightarrow \text{es\_mamífero}, \\
\quad \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \rightarrow \text{es\_ungulado}, \\
\quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \rightarrow \text{es\_jirafa}, \\
\quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \rightarrow \text{es\_cebra}, \\
\quad \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras}\} \\
\models \text{es\_cebra}
\end{array}
$$

Problemas lógicos

- **El problema de los veraces y los mentirosos:**
  - Enunciado: En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

    1. A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
    2. B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
    3. C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

    Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.
  - Simbolización: a: "A es veraz", b: "B es veraz", c: "C es veraz"
  - Formalización:
    $F_1 = a \leftrightarrow (b \wedge c \leftrightarrow c)$, $F_2 = b \leftrightarrow (a \wedge c \rightarrow b \wedge c \wedge \neg a)$ y $F_3 = c \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow a \vee b)$
  - Modelos de $\{F_1, F_2, F_3\}$:
    Si v es modelo de $\{F_1, F_2, F_3\}$, entonces $v(a) = 1, v(b) = 1, v(c) = 0$
  - Conclusión: A y B son veraces y C es mentiroso.

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

  Cap. 0 (Introducción), 6 (Sintaxis de la lógica proposicional), 7 (Semántica de la lógica proposicional), 9 (Consecuencia lógica) y 11 (Lógica proposicional y lenguaje natural).

- M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

  Cap. 1 (Introduction) y 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

  Cap. 1 (Propositional logic).

- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

  Cap. 1 (La sintaxis de la Lógica) y Cap. 2 (La semántica de la Lógica).