Tema 3: Formas normales

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Equivalencia lógica

- **Fórmulas equivalentes**
  - Def.: F y G son equivalentes si $v(F) = v(G)$ para toda valoración v.
  - Representación: $F \equiv G$.
  - Ejemplos de equivalencias notables:
    1. Idempotencia: $F \lor F \equiv F$; $F \land F \equiv F$.
    2. Conmutatividad: $F \lor G \equiv G \lor F$; $F \land G \equiv G \land F$.
    3. Asociatividad: $F \lor (G \lor H) \equiv (F \lor G) \lor H$; $F \land (G \land H) \equiv (F \land G) \land H$.
    4. Absorción: $F \land (F \lor G) \equiv F$; $F \lor (F \land G) \equiv F$.
    5. Distributividad: $F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H)$;
       $F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$.
    6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
    7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G$; $\neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$.
    8. Leyes de tautologías: Si F es una tautología, $F \land G \equiv G$; $F \lor G \equiv F$.
    9. Leyes de contradicciones: Si F es una contradicción $F \land G \equiv F$; $F \lor G \equiv G$.

Equivalencia lógica: propiedades

- **Relación entre equivalencia y bicondicional:**
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- **Propiedades básicas de la equivalencia lógica:**
  - Reflexiva: $F \equiv F$.
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$.
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$.
- **Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:**
  - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G, entonces la fórmula obtenida, F', es lógicamente equivalente a F.
  - Ejemplo:
$$\begin{aligned} F &= \neg(p \land q) \rightarrow \neg(p \land \neg\neg r) \\ G &= \neg(p \land q) \\ G' &= \neg p \lor \neg q \\ F' &= (\neg p \lor \neg q) \rightarrow \neg(p \land \neg\neg r) \end{aligned}$$

Formas normales: Forma normal conjuntiva

- **Átomos y literales:**
  - **Def.: Un átomo es un variable proposicional (p.e. $p, q, \dots$).**
  - **Def.: Un literal es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).**
  - **Notación: $L, L_1, L_2, \dots$ representarán literales.**

- **Forma normal conjuntiva:**
  - **Def.: Una fórmula está en forma normal conjuntiva (FNC) si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma**
    $(L_{1,1} \lor \dots \lor L_{1,n_1}) \land \dots \land (L_{m,1} \lor \dots \lor L_{m,n_m})$.
  - **Ejemplos:** $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$ **está en FNC.**
    $(\neg p \lor q) \land (q \to p)$ **no está en FNC.**
  - **Def.: Una fórmula G es una forma normal conjuntiva (FNC) de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F.**
  - **Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \land (q \to r))$ es $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r)$.**

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- **Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva:**
  - **Algoritmo**: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F, $\mathsf{FNC}(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \qquad (1)$$
2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \qquad (2)$$
3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad (3)$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \qquad (4)$$
$$\neg\neg A \equiv A \qquad (5)$$
4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad (6)$$
$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \qquad (7)$$

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- **Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:**

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) & \\
\equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) & [\text{por } (3)] \\
\equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) & [\text{por } (5)] \\
\equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) & [\text{por } (6)]
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:**

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) & \\
\equiv & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg p \vee q \vee \neg q \vee p &
\end{array}
$$

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- **Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:**

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \leftrightarrow q) \rightarrow r & \\
\equiv & (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p) \rightarrow r & [\text{por } (1)] \\
\equiv & \neg((p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)) \lor r & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg((\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)) \lor r & [\text{por } (2)] \\
\equiv & (\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor p)) \lor r & [\text{por } (3)] \\
\equiv & ((\neg\neg p \land \neg q) \lor (\neg\neg q \land \neg p)) \lor r & [\text{por } (4)] \\
\equiv & ((p \land \neg q) \lor (q \land \neg p)) \lor r & [\text{por } (5)] \\
\equiv & (((p \land \neg q) \lor q) \land ((p \land \neg q) \lor \neg p)) \lor r & [\text{por } (6)] \\
\equiv & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \land ((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p))) \lor r & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (((p \lor q) \land (\neg q \lor q)) \lor r) \land (((p \lor \neg p) \land (\neg q \lor \neg p)) \lor r) & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (((p \lor q) \lor r) \land ((\neg q \lor q) \lor r)) \land (((p \lor \neg p) \lor r) \land ((\neg q \lor \neg p) \lor r)) & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor q \lor r) \land (p \lor \neg p \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) & \\
\equiv & (p \lor q \lor r) \land (\neg q \lor \neg p \lor r) &
\end{array}
$$

Formas normales: Forma normal disyuntiva

- **Forma normal disyuntiva:**
  - **Def.:** Una fórmula está en forma normal disyuntiva (FND) si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma
    $(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,n_1}) \vee \ldots \vee (L_{m,1} \wedge \ldots \wedge L_{m,n_m})$.
  - **Ejemplos:** $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ está en FND.
    $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ no está en FND.
  - **Def.:** Una fórmula G es una forma normal disyuntiva (FND) de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F.
  - **Ejemplo:** Una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$.

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- **Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva:**
  - **Algoritmo**: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F, $\mathsf{FND}(F)$:

    1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
    $$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A) \tag{1}$$
    2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
    $$A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B \tag{2}$$
    3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
    $$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \tag{3}$$
    $$\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B \tag{4}$$
    $$\neg\neg A \equiv A \tag{5}$$
    4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias
    $$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C) \tag{6}$$
    $$(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C) \tag{7}$$

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- **Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \land (q \rightarrow r))$:**

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(p \land (q \rightarrow r)) & \\
\equiv & \neg(p \land (\neg q \lor r)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg p \lor \neg(\neg q \lor r) & [\text{por } (3)] \\
\equiv & \neg p \lor (\neg\neg q \land \neg r) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & \neg p \lor (q \land \neg r) & [\text{por } (5)]
\end{array}
$$

- **Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \lor \neg q \rightarrow \neg(p \land q))$:**

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\neg p \lor \neg q \rightarrow \neg(p \land q)) & \\
\equiv & \neg(\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(p \land q)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg\neg(\neg p \lor \neg q) \land \neg\neg(p \land q) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & (\neg p \lor \neg q) \land (p \land q) & [\text{por } (5)] \\
\equiv & (\neg p \land (p \land q)) \lor (\neg q \land (p \land q)) & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q) &
\end{array}
$$

Decisión de validez mediante FNC

- **Literales complementarios:**
  - El complementario de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$
- **Propiedades de reducción de tautologías:**
  - $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ es una tautología syss $F_1, \ldots, F_n$ lo son.
  - $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).
- **Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC**
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FNC de F.
    2. Decidir si cada una de las conjunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

Decisión de validez mediante FNC

- **Ejemplos de decisión de tautologías mediante FNC**
  - $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ no es tautología:

    $\mathsf{FNC}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

    Contramodelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

    v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$

    v_2 tal que $v_2(p) = 1$ y $v_2(r) = 1$
  - $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es tautología:

    $\mathsf{FNC}((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) = \neg p \vee q \vee \neg q \vee p$
  - $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ no es tautología:

    $\mathsf{FNC}((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$

    Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

    v_1 tal que $v_1(p) = 0, v_1(q) = 0$ y $v_1(r) = 0$

    v_2 tal que $v_2(p) = 1, v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- **Propiedades de reducción de satisfacibilidad:**
  - $F_1 \lor \ldots \lor F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ lo es.
  - $L_1 \land \ldots \land L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- **Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:**
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FND de F.
    2. Decidir si alguna de las disyunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- **Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND:**
  - $\neg(p \land (q \to r))$ es satisfacible:

    $\mathsf{FND}(\neg(p \land (q \to r))) = \neg p \lor (q \land \neg r)$

    Modelos de $\neg(p \land (q \to r))$:

    v_1 tal que $v_1(p) = 0$

    v_2 tal que $v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$
  - $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$ es insatisfacible:

    $FND(\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))) = (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q)$

Bibliografía

- **C. Badesa, I. Jané y R. Jansana** ***Elementos de lógica formal.*** **(Ariel, 2000)**

  Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).

- **M. Ben–Ari,** ***Mathematical logic for computer science (2nd ed.).*** **(Springer, 2001)**

  Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

- **J.A. Díez** ***Iniciación a la Lógica*****, (Ariel, 2002)**

  Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

- **M. Huth y M. Ryan** ***Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.*** **(Cambridge University Press, 2000)**

  Cap. 1 (Propositional logic).

- **E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín** ***Lógica computacional*** **(Thomson, 2003)**

  Cap. 4.4 (Formas normales).