

Tema 5: Resolución proposicional

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordon Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Lógica clausal: sintaxis

- Sintaxis de la lógica clausal

- Un **átomo** es una variable proposicional.

Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$

- Un **literal** es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).

Variables sobre literales: L, L_1, L_2, \dots

- Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.

Variables sobre cláusulas: C, C_1, C_2, \dots

- La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.

La cláusula vacía se representa por \square .

- **Conjuntos finitos de cláusulas.**

Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: S, S_1, S_2, \dots

Lógica clausal: semántica

- Semántica de la lógica clausal

- Def.: Una **valoración de verdad** es una aplicación $v : \mathbf{VP} \rightarrow \mathbb{B}$.

- Def.: El **valor de un literal positivo** p en una valoración v es $v(p)$.

- Def.: El **valor de un literal negativo** $\neg p$ en una valoración v es

$$v(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } v(p) = 0; \\ 0, & \text{si } v(p) = 1. \end{cases}$$

- Def.: El **valor de una cláusula** C en una valoración v es

$$v(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } v(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Def.: El **valor de un conjunto de cláusulas** S en una valoración v es

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S, v(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Prop.: En cualquier valoración v , $v(\square) = 0$.

Cláusulas y fórmulas

- Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
 - Def.: Una cláusula C y una fórmula F son **equivalentes** si $v(C) = v(F)$ para cualquier valoración v .
 - Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son **equivalentes** si $v(S) = v(F)$ para cualquier valoración v .
 - Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son **equivalentes** si, para cualquier valoración v , $v(S) = 1$ si y sólo si v es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
- De cláusulas a fórmulas
 - Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$.
 - Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.

Cláusulas y fórmulas

- De fórmulas a cláusulas (forma clausal)
 - Def.: Una **forma clausal** de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F .
 - Prop.: Si $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F . Entonces, una forma clausal de F es $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$.
 - Ejemplos:
 - * Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
 - * Una forma clausal de $p \rightarrow q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
 - * La cláusula $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \rightarrow q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$.
 - Def.: Una **forma clausal** de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S .
 - Prop.: Si S_1, \dots, S_n son formas clausales de F_1, \dots, F_n , entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Modelos, consistencia y consecuencia

- Modelos, consistencia y consecuencia
 - Def.: Una valoración v es **modelo** de un conjunto de cláusulas S si $v(S) = 1$.
 - Ej.: La valoración v tal que $v(p) = v(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
 - Def.: Un conjunto de cláusulas es **consistente** si tiene modelos e **inconsistente**, en caso contrario.
 - Ejemplos:
 - * $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ es consistente.
 - * $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
 - Prop.: Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
 - Def.: $S \models C$ si para todo modelo v de S , $v(C) = 1$.

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas:
 - Prop: Sean S_1, \dots, S_n formas clausales de las fórmulas F_1, \dots, F_n .
 - * $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
 - * Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
 1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
 2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.
 3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
 - Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$ syss $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

Regla de resolución

- Reglas de inferencia:

- Reglas habituales:

$$\text{Modus Ponens: } \frac{p \rightarrow q, \quad p}{q} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$$

$$\text{Modus Tollens: } \frac{p \rightarrow q, \quad \neg q}{\neg p} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$$

$$\text{Encadenamiento: } \frac{p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \qquad \frac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$$

- Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n\}}$$

Regla de resolución

- Resolventes

- Def.: Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L . La **resolvente de C_1 y C_2 respecto de L** es

$$\text{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$$

- Ejemplos: $\text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) = \{p, r\}$
 $\text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) = \{p, \neg p\}$
 $\text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) = \{q, \neg q\}$
 $\text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) = \{q\}$
 $\text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) = \square$

- Resolventes de dos cláusulas:

- Def.: $\text{Res}(C_1, C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2

- Ejemplos: $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) = \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\}$
 $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) = \{\{q\}\}$
 $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) = \emptyset$

- Nota: $\square \notin \text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

Demostraciones por resolución

- Ejemplo de refutación por resolución:
 - Refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:
 - 1 $\{p, q\}$ Hipótesis
 - 2 $\{\neg p, q\}$ Hipótesis
 - 3 $\{p, \neg q\}$ Hipótesis
 - 4 $\{\neg p, \neg q\}$ Hipótesis
 - 5 $\{q\}$ Resolvente de 1 y 2
 - 6 $\{\neg q\}$ Resolvente de 3 y 4
 - 7 \square Resolvente de 5 y 6

Demostraciones por resolución

- Definiciones

- Sea S un conjunto de cláusulas.
- La sucesión (C_1, \dots, C_n) es una **demostración por resolución** de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
 - * $C_i \in S$;
 - * existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
- La cláusula C es **demostrable por resolución** a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S .
- Una **refutación por resolución** de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S .
- Se dice que S es **refutable por resolución** si existe una refutación por resolución a partir de S .

Demostraciones por resolución

- Demostraciones por resolución

- Def.: Sean S_1, \dots, S_n formas clausales de las fórmulas F_1, \dots, F_n y S una forma clausal de $\neg F$

Una **demostración por resolución** de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.

- Def.: La fórmula F es **demostrable por resolución** a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.

- Ejemplo: Demostración por resolución de $p \wedge q$ a partir de $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\}$

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	\square	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- Propiedades:

- Si C es una resolvente de C_1 y C_2 , entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Si el conjunto de cláusulas S es refutable, entonces S es inconsistente.
- Teor.: El cálculo de resolución es adecuado y completo; es decir,

Adecuado: $S \vdash_{Res} F \implies S \models F$

Completo: $S \models F \implies S \vdash_{Res} F$

Argumentación y resolución

- Problema de los animales: Se sabe que
 1. Los animales con pelo y los que dan leche son mamíferos.
 2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
 3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
 4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

- Formalización:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tiene_pelos} \vee \text{da_leche} \rightarrow \text{es_mamífero}, \\ \text{es_mamífero} \wedge (\text{tiene_pezuñas} \vee \text{rumia}) \rightarrow \text{es_ungulado}, \\ \text{es_ungulado} \wedge \text{tiene_cuello_largo} \rightarrow \text{es_jirafa}, \\ \text{es_ungulado} \wedge \text{tiene_rayas_negras} \rightarrow \text{es_cebra}, \\ \text{tiene_pelos} \wedge \text{tiene_pezuñas} \wedge \text{tiene_rayas_negras} \end{array} \right\} \quad \vdash_{Res} \text{es_cebra}$$

Argumentación y resolución

- Resolución:

1	{ \neg tiene_pelos, es_mamífero}	Hipótesis
2	{ \neg da_leche, es_mamífero}	Hipótesis
3	{ \neg es_mamífero, \neg tiene_pezuñas, es_ungulado}	Hipótesis
4	{ \neg es_mamífero, \neg rumia, es_ungulado}	Hipótesis
5	{ \neg es_ungulado, \neg tiene_cuello_largo, es_jirafa}	Hipótesis
6	{ \neg es_ungulado, \neg tiene_rayas_negras, es_cebra}	Hipótesis
7	{tiene_pelos}	Hipótesis
8	{tiene_pezuñas}	Hipótesis
9	{tiene_rayas_negras}	Hipótesis
10	{ \neg es_cebra}	Hipótesis
11	{es_mamífero}	Resolvente de 1 y 7
12	{ \neg tiene_pezuñas, es_ungulado}	Resolvente de 11 y 3
13	{es_ungulado}	Resolvente de 12 y 8
14	{ \neg tiene_rayas_negras, es_cebra}	Resolvente de 13 y 6
15	{es_cebra}	Resolvente de 14 y 9
16	□	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

1. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001).
Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs.
2. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973).
Cap. 5.2: The resolution principle for the propositional logic.
3. N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001).
Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003).
Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional.
5. U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989).
Cap. 1.5: Resolution.