

Tema 6: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordon Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Ejemplo 1: *Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*

- Representación en lógica proposicional:

$$\{SvC \rightarrow CvS, \quad SvC\} \models CvS$$

- Ejemplo 2: *Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*

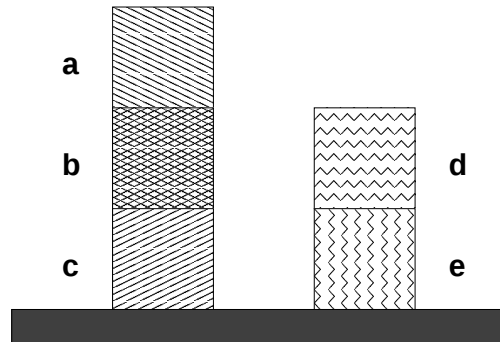
- Representación en lógica proposicional: Imposible

- Representación en lógica de primer orden:

$$\{(\forall x)(\forall y)[vecina(x, y) \rightarrow vecina(y, x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\} \\ \models vecina(Cadiz, Sevilla)$$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Mundo de los bloques



- $sobre(x, y)$ se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
- $sobre_mesa(x)$ se verifica si el bloque x está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:
 $sobre(a, b), sobre(b, c), sobre_mesa(c), sobre(d, e), sobre_mesa(e)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- $bajo(x, y)$ se verifica si el bloque x está debajo del bloque y

$$(\forall x)(\forall y)[bajo(x, y) \leftrightarrow sobre(y, x)]$$

- $encima(x, y)$ se verifica si el bloque x está encima del bloque y pudiendo haber otros bloques entre ellos

$$(\forall x)(\forall y)[encima(x, y) \leftrightarrow sobre(x, y) \vee (\exists z)[sobre(z, x) \wedge encima(z, y)]]$$

- $libre(x)$ se verifica si el bloque x no tiene bloques encima

$$(\forall x)[libre(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)sobre(y, x)]$$

- $pila(x, y, z)$ se verifica si el bloque x está sobre el y , el y sobre el z y el z sobre la mesa

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[pila(x, y, z) \leftrightarrow sobre(x, y) \wedge sobre(y, z) \wedge sobre_mesa(z)]$$

- Prop.: Si z, y, z es una pila entonces y no está libre

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[pila(x, y, z) \rightarrow \neg libre(y)]$$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Representación con funciones e igualdad

- $es_bloque(x)$ se verifica si x es un bloque
- $superior(x)$ es el bloque que está sobre el bloque x

- Situación del ejemplo:

$es_bloque(a), es_bloque(b), es_bloque(c), es_bloque(d), es_bloque(e)$

$superior(b) = a, superior(c) = b, superior(e) = d$

- $sobre_mesa(x)$ se verifica si el bloque x está sobre la mesa

$(\forall x)[sobre_mesa(x) \leftrightarrow es_bloque(x) \wedge \neg(\exists y)superior(y) = x]$

- $libre(x)$ se verifica si el bloque x no tiene bloques encima

$(\forall x)[libre(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)superior(x) = y]$

- $tope(x)$ es el bloque libre que está encima de x

$(\forall x)[(libre(x) \rightarrow tope(x) = x) \wedge (\neg libre(x) \rightarrow tope(x) = tope(superior(x)))]$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Ejemplos de formalización:
 - *La Tierra es un planeta:* $\text{planeta}(\text{Tierra})$
 - *La Luna no es un planeta:* $\neg \text{planeta}(\text{Luna})$
 - *La Luna es un satélite:* $\text{satélite}(\text{Luna})$
 - *La Tierra gira alrededor del Sol:* $\text{gira}(\text{Tierra}, \text{Sol})$
 - *Todo planeta es un satélite:* $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow \text{satélite}(x)]$
 - *Todo planeta gira alrededor del Sol:* $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow \text{gira}(x, \text{Sol})]$
 - *Algún planeta gira alrededor de la Luna:* $(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna})]$
 - *Hay por lo menos un satélite:* $(\exists x)\text{satélite}(x)$
 - *Ningún planeta es un satélite:* $\neg(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \text{satélite}(x)]$
 - *Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:* $\neg(\exists x)\text{gira}(x, x)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- *Alrededor de los satélites no giran objetos:* $(\forall x)[\text{satélite}(x) \rightarrow \neg(\exists y)\text{gira}(y, x)]$
- *Hay exactamente un satélite:* $(\exists x)[\text{satélite}(x) \wedge (\forall y)[\text{satélite}(y) \rightarrow x = y]]$
- *La Luna es un satélite de la Tierra:* $\text{satélite}(\text{Luna}, \text{Tierra})$
[Notar la sobrecarga de la relación satélite]
- *Todo planeta tiene un satélite:* $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow (\exists y)\text{satélite}(y, x)]$
- *La Tierra no tiene satélites:* $\neg(\exists x)\text{satélite}(x, \text{Tierra})$
- *Algún planeta no tiene satélites:* $(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \neg(\exists y)\text{satélite}(y, x)]$
- *Sólo los planetas tienen satélites:* $(\forall x)[(\exists y)\text{satélite}(y, x) \rightarrow \text{planeta}(x)]$
- *Todo satélite es satélite de algún planeta:*
 $(\forall x)[\text{satélite}(x) \rightarrow (\exists y)(\text{planeta}(y) \wedge \text{satélite}(x, y))]$
- *La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:*
 $\neg(\exists x)(\exists y)[\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(\text{Luna}, x) \wedge \text{gira}(\text{Luna}, y) \wedge x \neq y]$
- *Hay exactamente dos planetas:*
 $(\exists x)(\exists y)[\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[\text{planeta}(z) \rightarrow (z = x \vee z = y)]]$

Lenguaje de primer orden

- Lenguaje de primer orden:
 - Símbolos lógicos:
 - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$
 - Conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
 - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
 - Símbolo de igualdad: $=$.
 - Símbolos propios:
 - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$
 - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$
 - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$
 - Símbolos auxiliares: “(”, “)”, “,”.
 - Notación:
 - $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
 - Var representa el conjunto de las variables.
 - Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

Ejemplos de lenguajes de primer orden

- Lenguaje del mundo de los bloques:
 - Símbolos de constantes: a, b, c, d, e
 - Símbolos de predicado (y de relación):
 - de aridad 1: *sobre_mesa, libre, es_bloque*
 - de aridad 2: *sobre, bajo, encima*
 - de aridad 3: *pila*
 - Símbolos de función (de aridad 1): *superior, tope*
- Lenguaje de la aritmética:
 - Símbolos de constantes: $0, 1$
 - Símbolos de función:
 - monaria: s (siguiente)
 - binarias: $+, \cdot$
 - Símbolo de predicado binario: $<$

Sintaxis: términos

- Términos
 - Def. de **término** de un lenguaje de primer orden L :
 - Las variables son términos de L .
 - Las constantes de L son términos de L .
 - Si f es un símbolo de función n -aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L , entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L .
 - Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,
 1. $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
 2. $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
 - Notación:
 - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
 - $\text{Térm}(L)$ representa el conjunto de los términos de L

Sintaxis: fórmulas atómicas

- Fórmulas atómicas:

- Def. de **fórmula atómica** de un lenguaje de primer orden L :

- Si t_1 y t_2 son términos de L , entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de L .
 - Si P es un símbolo de relación n -aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L , entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de L .

- Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,

1. $<(\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
2. $+(x, y) = \cdot(x, y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$

- Notación:

- $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
 - $\text{Átom}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas atómicas de L .

Sintaxis: fórmulas

- Fórmulas:

- Def. de las fórmulas de L :

- Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L .
 - Si F y G son fórmulas de L , entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de L .
 - Si F es una fórmula de L , entonces $(\forall x)F$ y $(\exists x)F$ son fórmulas de L .

- Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,

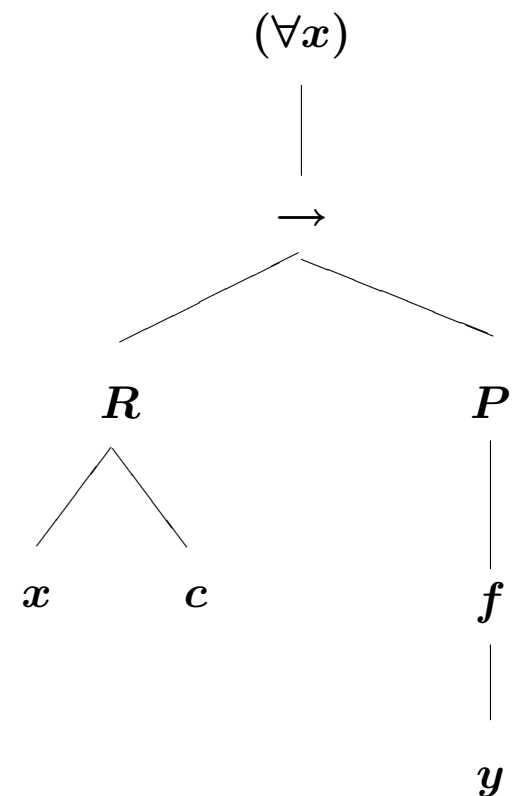
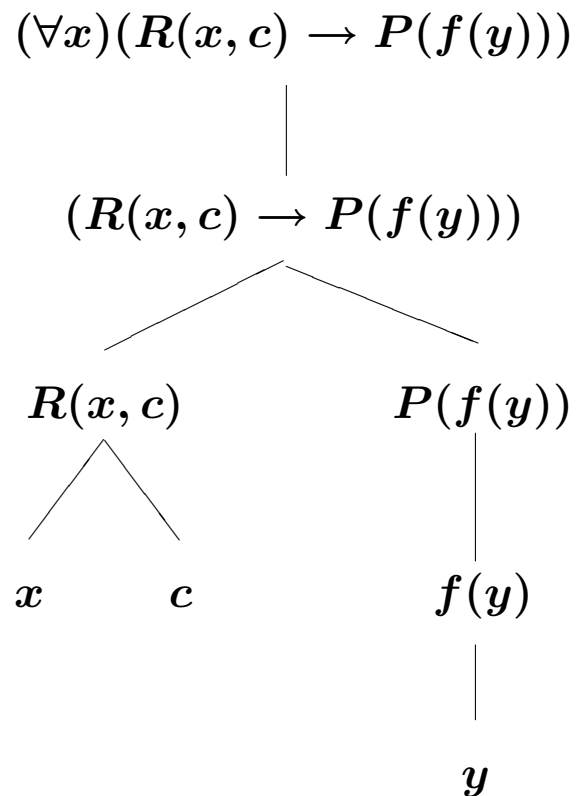
1. $(\forall x)(\exists y) < (x, y)$ es una fórmula que se suele escribir como $(\forall x)(\exists y)x < y$
2. $(\forall x)(\exists y) + (x, y)$ no es una fórmula.

- Notación:

- $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
 - $\text{Fórm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de L .

Sintaxis: fórmulas

- Árboles de análisis (o de formación) y esquemáticos



Sintaxis: subfórmulas

- Subfórmulas:

- Def: El conjunto $\text{Subf}(F)$ de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = (\forall x)G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = (\exists x)G \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\text{Subf}((\forall x)(R(x, c) \rightarrow P(f(y)))) = \{ (\forall x)(R(x, c) \rightarrow P(f(y))), \\ (R(x, c) \rightarrow P(f(y))), \\ R(x, c), \\ P(f(y)) \}$$

Sintaxis: omisión de paréntesis

- Criterios de reducción de paréntesis:

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.

$F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$

- Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

$\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ es una abreviatura de $((\forall x)P(x)) \rightarrow Q(x)$

- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

$F \vee G \vee H$ es una abreviatura de $(F \vee (G \vee H))$

$F \wedge G \wedge H \rightarrow \neg F \vee G$ es una abreviatura de $((F \wedge (G \wedge H)) \rightarrow (\neg F \vee G))$

- Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.

$x + y$ es una abreviatura de $+(x, y)$

$x < y$ es una abreviatura de $<(x, y)$

Sintaxis: conjuntos de variables

- Conjuntos de variables:

- Def.: El **conjunto de las variables** de un término t se define recursivamente por:

$$V(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Def.: El **conjunto de las variables** de una fórmula F se define recursivamente por:

$$V(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup V(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ V(G) \cup V(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

- Ejemplos:

- El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(x, c) \rightarrow P(f(y)))$ es $\{x, y\}$.
- El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(a, c) \rightarrow P(f(y)))$ es $\{y\}$.

Sintaxis: apariciones libres y ligadas

- Apariciones libres y ligadas:
 - Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es **ligada** si es en una subfórmula de F de la forma $(\forall x)G$ ó $(\exists x)G$.
 - Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es **libre** si no es ligada
 - Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:

$$(\forall x)(P(\underline{x}) \rightarrow R(\underline{x}, y)) \rightarrow ((\exists y)P(\underline{y}) \rightarrow R(z, x))$$

$$(\exists x)R(\underline{x}, y) \vee (\forall y)P(\underline{y})$$

$$(\forall x)(P(\underline{x}) \rightarrow (\exists y)R(\underline{x}, \underline{y}))$$

$$P(x) \rightarrow R(x, y)$$

Sintaxis: variables libres y ligadas

- Variables libres y ligadas:

- Def.: La variable x es libre en F si tiene una aparición libre en F .
- Def.: La variable x es ligada en F si tiene una aparición ligada en F .
- Prop.: El conjunto de las variables libres de una fórmula F es:

$$VL(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup V(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ VL(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ VL(G) \cup VL(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ VL(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ VL(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

- Ejemplo:

Fórmula	Ligadas	Libres
$(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x, y)) \rightarrow ((\exists y)P(y) \rightarrow R(x, z))$	x, y	x, y, z
$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y))$	x, y	
$(\forall z)(P(x) \rightarrow R(x, y))$		x, y

Sintaxis: fórmulas cerradas y básicas

- **Fórmula cerradas:**

- Def.: Una **fórmula cerrada** (o **sentencia**) es una fórmula sin variables libres.
- Ejemplos: $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y))$ es cerrada.
 $(\exists x)R(x, y) \vee (\forall y)P(y)$ no es cerrada.

- **Fórmulas básicas:**

- Def.: Una **fórmula básica** es una fórmula sin variables.
- Ejemplos: $P(a) \rightarrow R(a, b)$ es básica.
 $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)R(x, y))$ no es básica.

Sintaxis: sustituciones

- Sustituciones (de un lenguaje):
 - Def.: Una **sustitución** σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Término}(L)$.
 - Ejemplo: La aplicación σ de Var en los términos de la aritmética tal que $\sigma(x) = s(0)$, $\sigma(y) = x + y$ y $\sigma(z) = z$ para $z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$ es una sustitución.
 - Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por
$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
 - Ejemplo: La sustitución del ejemplo anterior se representa por $[x/s(0), y/x + y]$
 - Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

Sintaxis: Aplicación de sustituciones a términos

- Aplicación de sustituciones a términos:

- Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i .
- Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \rightarrow \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Si $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$, entonces
 - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
 - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y .
 - $h(a, x, w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y, a), w)$
 - $f(x, y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y, a), z)$
 - $h(a, f(x, y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x, y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

Sintaxis: Composición de sustituciones

- Composición de sustituciones:

- Diferencia entre sustituciones simultáneas y consecutivas:

- $g(x, z)[x/g(z, b), z/a] = g(g(z, b), a)$

- $g(x, z)[x/g(z, b)][z/a] = g(g(z, b), z)[z/a] = g(g(a, b), a)$

- Cálculo de la composición: Si $\sigma_1 = [x/f(z, a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces

- $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z, a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$

- $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

- $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$

- $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w), a), y/w, z/g(w)]$. Comprobación:

$$h(y, x)\sigma_1\sigma_2 = (h(y, x)\sigma_1)\sigma_2 = h(w, f(z, a))\sigma_2 = h(w\sigma_2, f(z, a)\sigma_2) = h(w, f(g(w), a))$$

$$h(y, x)\sigma_1\sigma_2 = h(y, x)[x/f(g(w), a), y/w, z/g(w)] = h(w, f(g(w), a))$$

Sintaxis: Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Aplicación de sustituciones a fórmulas:

- Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i .
- Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \rightarrow \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Sintaxis: Aplicación de sustituciones a fórmulas

• Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces

$$\begin{aligned} 1. ((\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x, y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \rightarrow R(x, y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \rightarrow R(x, y)\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x, b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. (Q(x) \rightarrow (\forall x)R(x, y))\sigma &= Q(x)\sigma \rightarrow ((\forall x)R(x, y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \rightarrow (\forall x)(R(x, y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \rightarrow (\forall x)R(x, b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. ((\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x, y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x, y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \rightarrow ((\forall y)R(x, y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)(R(x, y)\sigma_{xy})) \\ &= (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x, y)) \end{aligned}$$

Sintaxis: Sustituciones libres

- Sustituciones libres:

- Def.: Una **sustitución se denomina libre para una fórmula** cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.

- Ejemplos:

- $[y/x]$ no es libre para $(\exists x)(x < y)$
 $(\exists x)(x < y)[y/x] = (\exists x)(x < x)$
- $[y/g(y)]$ es libre para $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(y)] = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(g(y))))$
- $[y/g(x)]$ no es libre para $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(x)] = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(g(x))))$

- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F .

Semántica: Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una **estructura del lenguaje** L es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
 - U es un conjunto no vacío, denominado **universo** de la estructura;
 - I es una función cuyo dominio es el conjunto de símbolos propios de L y tal que
 - si c es una constante de L , entonces $I(c) \in U$
(i.e. $I(c)$ es un elemento de U);
 - si f es un símbolo de función n -aria ($n > 0$) de L , entonces $I(f) : U^n \rightarrow U$
(i.e. $I(f)$ es una función n -aria en U);
 - si R es un símbolo de relación n -aria ($n > 0$) de L , entonces $I(R) \subseteq U^n$
(i.e. $I(R)$ es una relación n -aria en U).
- Una **asignación** A en una estructura (U, I) es una función $A : \text{Var} \rightarrow U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una **interpretación de** L es un par $(\mathcal{I}, A)$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad **V** y **F** en lugar de 1 y 0.

Semántica: Estructuras

- Ejemplos: Sea L el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:

constante: 0;

símbolo de función monaria: s ;

símbolo de función binaria: $+$ y

símbolo de relación binaria: $\leq$

- Primera estructura de L :

$$U_1 = \mathbb{N}$$

$$I_1(0) = 0$$

$$I_1(s) = \{(n, n + 1) : n \in \mathbb{N}\} \text{ (sucesor)}$$

$$I_1(+) = \{(a, b, a + b) : a, b \in \mathbb{N}\} \text{ (suma)}$$

$$I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\} \text{ (menor o igual)}$$

- Segunda estructura de L :

$$U_2 = \{0, 1\}^* \text{ (cadenas de 0 y 1)}$$

$$I_2(0) = \epsilon \text{ (cadena vacía)}$$

$$I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\} \text{ (siguiente)}$$

$$I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\} \text{ (concatenación)}$$

$$I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1 \text{ es prefijo de } w_2\} \text{ (prefijo)}$$

Semántica: Estructuras

- Ejemplos (cont.):

- Tercera estructura de L :

$$U_3 = \{abierto, cerrado\}$$

$$I_3(0) = cerrado$$

$$I_3(s) = \{ (abierto, cerrado), \\ (cerrado, abierto) \}$$

$$I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), \\ (abierto, cerrado, abierto), \\ (cerrado, abierto, abierto), \\ (cerrado, cerrado, cerrado) \}$$

$$I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), \\ (cerrado, abierto), \\ (cerrado, cerrado) \}$$

e	$I_3(s)(e)$	$I_3(+)$	$abierto$	$cerrado$	$I_3(\leq)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	$cerrado$	$abierto$	$abierto$	$abierto$	$abierto$	1	0
$cerrado$	$abierto$	$cerrado$	$abierto$	$cerrado$	$cerrado$	1	1

Semántica: Evaluación de términos

- Evaluación de términos:

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$, se define la **función de evaluación de términos** $\mathcal{I}_A : \text{Término}(L) \rightarrow U$ por

$$\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- $\mathcal{I}_A(t)$ se lee “**el valor de t en $\mathcal{I}$ respecto de A** ”.
- Ejemplos: Sean L el lenguaje de la página 27 y t el término $s(+ (x, s(0)))$.
 - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+ (x, s(0)))) &= I(s)(\mathcal{I}_A(+ (x, s(0)))) &= \\ &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) &= \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) &= I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) &= \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) &= I(s)(I(+)(3, 1)) &= \\ &= I(s)(4) &= 5 \end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de términos

- Ejemplos (cont.)

- Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+ (x, s(0)))) &= I(s)(\mathcal{I}_A(+ (x, s(0)))) &= \\
 &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) &= \\
 &= I(s)(I(+)(10, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) &= I(s)(I(+)(10, I(s)(I(0)))) &= \\
 &= I(s)(I(+)(10, I(s)(\epsilon))) &= I(s)(I(+)(10, 1)) &= \\
 &= I(s)(101) &= 10111
 \end{aligned}$$

- Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = \text{abierto}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+ (x, s(0)))) &= I(s)(\mathcal{I}_A(+ (x, s(0)))) &= \\
 &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) &= \\
 &= I(s)(I(+)(\text{abierto}, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) &= I(s)(I(+)(\text{abierto}, I(s)(I(0)))) &= \\
 &= I(s)(I(+)(\text{abierto}, I(s)(\text{cerrado}))) &= I(s)(I(+)(\text{abierto}, \text{abierto})) &= \\
 &= I(s)(\text{abierto}) &= \text{cerrado}
 \end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de términos

- Ejemplo anterior con notación reducida e infija:

Sean L el lenguaje de la página 27 y t el término $s(x + s(0))$.

- Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x + s(0))) = s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(3 +^I s^I(0)) = s^I(3 +^I 1) = \\ &= s^I(4) = 5\end{aligned}$$

- Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x + s(0))) = s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(10 +^I s^I(\epsilon)) = s^I(10 +^I 1) = \\ &= s^I(101) = 1011\end{aligned}$$

- Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = \textit{abierto}$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(x + s(0))) &= s^I(\textit{abierto} +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(\textit{abierto} +^I s^I(\textit{cerrado})) &= s^I(\textit{abierto} +^I \textit{abierto}) = \\ &= s^I(\textit{abierto}) &= \textit{cerrado}\end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Variante de una asignación:

- Def.: Sea A una asignación en la estructura (U, I) y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

- Función de verdad de una relación:

- Def.: Si R es una relación n -aria en U (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la **función de verdad de R** es la función $H_R : U^n \rightarrow \mathbb{B}$ definida por

$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Función de verdad de la igualdad:

- Def.: La **función de verdad de la igualdad** en U es la función $H_= : U^2 \rightarrow \mathbb{B}$ definida por

$$H_=(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Evaluación de fórmulas:

- Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A sobre $\mathcal{I}$, se define la **función de evaluación de fórmulas** $\mathcal{I}_A : \text{Fórm}(L) \rightarrow \mathbb{B}$ por

- Si F es $t_1 = t_2$, $\mathcal{I}_A(F) = H_{=}(I_A(t_1), I_A(t_2))$

- Si F es $P(t_1, \dots, t_n)$, $\mathcal{I}_A(F) = H_{I(P)}(I_A(t_1), \dots, I_A(t_n))$

- Si F es $\neg G$, $\mathcal{I}_A(F) = H_{\neg}(I_A(G))$

- Si F es $G * H$, $\mathcal{I}_A(F) = H_{*}(I_A(G), I_A(H))$

- Si F es $(\forall x)G$, $\mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

- Si F es $(\exists x)G$, $\mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$

- $\mathcal{I}_A(F)$ se lee “**el valor de F en $\mathcal{I}$ respecto de A** ”.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists y)P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ y $A(x) = 1$

– En notación completa:

$$\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[y/2]}P(x, y) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1, 1) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}$.

– En notación reducida:

$$\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[y/2]}P(x, y) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) &= P^I(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= P^I(1, 1) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}P(x, y) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/1, y/2]}P(x, y) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}P(x, y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}(x), \mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[x/1, y/1](x), A[x/1, y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1, 1) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}.$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/2, y/1]}P(x, y) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/2, y/2]}P(x, y) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2, y/2]}P(x, y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/2, y/2]}(x), \mathcal{I}_{A[x/2, y/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[x/2, y/2](x), A[x/2, y/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2, 2) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}.$$

$$\text{Por tanto, } \mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo anterior en notación reducida:

Evaluación de $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}P(x, y) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/1, y/2]}P(x, y) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}P(x, y) &= P^I(1, 1) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}.$$

$$\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/2, y/1]}P(x, y) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/2, y/2]}P(x, y) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2, y/2]}P(x, y) &= P^I(2, 2) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}.$$

$$\text{Por tanto, } \mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x, y)) = \mathbf{V}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) &= \\ &= H_{\rightarrow}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x)), \mathcal{I}_{A[x/1]}(Q(g(x), a))) = \\ &= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x)), H_{I(Q)}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x)), \mathcal{I}_{A[x/1]}(a))) = \\ &= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(A[x/1](x)), H_{I(Q)}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x)), I(a))) = \\ &= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(1), H_{I(Q)}(I(g)(A[x/1](x)), 1)) = \\ &= H_{\rightarrow}(\mathbf{F}, H_{I(Q)}(I(g)(1), 1)) = \\ &= H_{\rightarrow}(\mathbf{F}, H_{I(Q)}(2, 1)) = \\ &= H_{\rightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) = \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo (cont.)

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) &= \\&= H_{\rightarrow}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x)), \mathcal{I}_{A[x/2]}(Q(g(x), a))) = \\&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x)), H_{I(Q)}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(x)), \mathcal{I}_{A[x/2]}(a))) = \\&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(A[x/2](x)), H_{I(Q)}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x)), I(a))) = \\&= H_{\rightarrow}(H_{I(P)}(2), H_{I(Q)}(I(g)(A[x/2](x)), 1)) = \\&= H_{\rightarrow}(\mathbf{V}, H_{I(Q)}(I(g)(2), 1)) = \\&= H_{\rightarrow}(\mathbf{V}, H_{I(Q)}(1, 1)) = \\&= H_{\rightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \\&= \mathbf{V}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))) = \mathbf{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo anterior con notación reducida:

Evaluación de $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) \\ &= P^I(1) \rightarrow Q^I(g^I(1), a^I) \\ &= \mathbf{F} \rightarrow Q^I(2, 1) \\ &= \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \rightarrow Q(g(x), a)) \\ &= P^I(2) \rightarrow Q^I(g^I(2), a^I) \\ &= \mathbf{V} \rightarrow Q^I(1, 1) \\ &= \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(g(x), a))) = \mathbf{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists x)(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a)))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\exists x)(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a)))) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a))) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a))) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a))) &= P^I(g^I(1)) \wedge Q^I(1, g^I(a^I)) \\ &= P^I(2) \wedge Q^I(1, g^I(1)) \\ &= \mathbf{V} \wedge Q^I(1, 2) \\ &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\exists x)(P(g(x)) \wedge Q(x, g(a)))) = \mathbf{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x, a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\exists x)(P(x) \wedge Q(x, a))) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \wedge Q(x, a)) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \wedge Q(x, a)) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \wedge Q(x, a)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1, a^I) \\ &= \mathbf{F} \wedge Q^I(1, 1) \\ &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \\ &= \mathbf{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \wedge Q(x, a)) &= P^I(2) \wedge Q^I(2, a^I) \\ &= \mathbf{V} \wedge Q^I(2, 1) \\ &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\exists x)(P(x) \wedge Q(x, a))) = \mathbf{F}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y))) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y)) = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y)) = \mathbf{V}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y)) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}(P(x) \wedge Q(x, y)) = \mathbf{V} \text{ ó } \mathcal{I}_{A[x/1, y/2]}(P(x) \wedge Q(x, y)) = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1, y/1]}(P(x) \wedge Q(x, y)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1, 1) \\ &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \\ &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1, y/2]}(P(x) \wedge Q(x, y)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1, 2) \\ &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \\ &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y)) = \mathbf{F}$$

$$\text{Por tanto, } \mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x, y))) = \mathbf{V}.$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)g(x) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)g(x) = x) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}g(x) = x = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}g(x) = x = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x) = x) &= (g^I(1) = 1) \\ &= (2 = 1) \\ &= \mathbf{F}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)g(x) = x) = \mathbf{F}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)g(g(x)) = x) = \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}g(g(x)) = x = \mathbf{V} \text{ y } \mathcal{I}_{A[x/2]}g(g(x)) = x = \mathbf{V}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1) \\ &= (g^I(2) = 1) \\ &= (1 = 1) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2) \\ &= (g^I(1) = 2) \\ &= (2 = 2) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)g(g(x)) = x) = \mathbf{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea G la fórmula $(\forall x)(\exists y)R(y, x)$, entonces
 - $\mathcal{I}_A(G) = \mathbf{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I)$, $I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
 - $\mathcal{I}_A(G) = \mathbf{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea G la fórmula $(\exists x)(\forall y)R(x, y)$, entonces
 - $\mathcal{I}_A(G) = \mathbf{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
 - $\mathcal{I}_A(G) = \mathbf{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \geq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea G la fórmula $(\forall y)R(x, y)$, entonces
 - $\mathcal{I}_A(G) = \mathbf{V}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
 - $\mathcal{I}_A(G) = \mathbf{F}$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Evaluación de fórmulas en las estructuras de las páginas 27–28:

Fórmula	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_3$
$(\forall x)0 \leq x$	V	V	V
$(\forall x)x \leq s(x)$	V	V	F
$(\exists x)s(x) = 0$	F	F	V
$(\exists x)s(x) = x$	F	F	F

Semántica: Evaluación variables libres

- Evaluación y variables libres:
 - Sea t un término de L , F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L .
 - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de t , entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
 - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de F , entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
 - Si t no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(t)$.
 - Si F es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(F)$.
 - Si las variables libres de F son $x_1, \dots, x_n$, entonces son equivalentes
 - $\mathcal{I}_A(F) = 1$, para toda asignación A en $\mathcal{I}$.
 - $\mathcal{I}((\forall x_1) \dots (\forall x_n) F) = 1$.

Semántica: Realización de una fórmula

- Realización de una fórmula:

- Def.: Sean F una fórmula de L , $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.

- $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de F si $\mathcal{I}_A(F) = 1$.

- Se representa por $\mathcal{I}_A \models F$.

- $(\mathcal{I}, A)$ no es una realización de F si $\mathcal{I}_A(F) = 0$.

- Se representa por $\mathcal{I}_A \not\models F$.

- F se verifica en $\mathcal{I}$ respecto de A si $\mathcal{I}_A \models F$.

- F no se verifica en $\mathcal{I}$ respecto de A si $\mathcal{I}_A \not\models F$.

- Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.

- Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$, entonces

- $$\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x, y),$$

- Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$, entonces

- $$\mathcal{I}_A \not\models (\forall y)R(x, y),$$

Semántica: Satisfacibilidad en una estructura

- Satisfacibilidad en una estructura
 - Def.: Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L .
 - F es satisfacible en $\mathcal{I}$ si existe alguna asignación A en I tal que $\mathcal{I}_A \models F$.
 - F es insatisfacible en $\mathcal{I}$ si no existe ninguna asignación A en I tal que $\mathcal{I}_A \models F$.
 - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.
 - $(\forall y)R(x, y)$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
 $\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x, y)$, con $A(x) = 0$.
 - $(\forall x)R(x, y)$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$.
No existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, se tenga $m \leq n$.
 - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \geq$.
 - $(\forall y)R(x, y)$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$.
No existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga $m \geq n$.
 - $(\forall x)R(x, y)$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
 $\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x, y)$, con $A(x) = 0$.

Semántica: Validez en una estructura

- Validez en una estructura

- Def.: Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L .

- F es válida en $\mathcal{I}$ si, para toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A \models F$.
Se representa por $\mathcal{I} \models F$.

- F no es válida en $\mathcal{I}$ si, para alguna asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A \not\models F$.
Se representa por $\mathcal{I} \not\models F$.

- Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$.

- $\mathcal{I} \models (\exists y)R(x, y)$.

- Si A es una asignación en $\mathcal{I}$, entonces $\mathcal{I}_A \models (\exists y)R(x, y)$

- $$I_{A[y/A(x)+1]}(R(x, y)) = \mathbf{V}$$

- $\mathcal{I} \not\models (\forall y)R(x, y)$.

- Sea A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$. Entonces $\mathcal{I}_A \not\models (\forall y)R(x, y)$

- $$I_{A[y/3]}(R(x, y)) = \mathbf{F}$$

Semántica: Satisfacibilidad y validez en una estructura

- Satisfacibilidad y validez en una estructura para sentencias
 - Sea F una sentencia de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L .
 - F es válida en $\mathcal{I}$ syss F es satisfacible en $\mathcal{I}$.
 - Se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones
 1. F es válida en $\mathcal{I}$.
 2. $\neg F$ es válida en $\mathcal{I}$.
- Cierres cuantificacionales:
 - Sea F una fórmula de L , $\mathcal{I}$ una estructura de L y $\{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de las variables libres de F .
 - F es válida en $\mathcal{I}$ syss $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) F$ es válida en $\mathcal{I}$
 - F es satisfacible en $\mathcal{I}$ syss $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible en $\mathcal{I}$

Semántica: Modelo de una fórmula

- Modelo de una fórmula:
 - Def.: Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L .
 - $\mathcal{I}$ es un modelo de F si $\mathcal{I} \models F$.
 - $\mathcal{I}$ no es un modelo de F si $\mathcal{I} \not\models F$.
 - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$. Entonces
 $\mathcal{I} \models (\exists y)R(x, y).$ $\mathcal{I} \not\models (\forall y)R(x, y).$
 - Ejemplos: Sea F la fórmula $(\forall x)f(x, e) = x$. Las siguientes estructuras son modelos de F .
 - (U, I) con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como la suma.
 - (U, I) con $U = \{0, 1\}^*$, $I(e) = \epsilon$ e $I(f)$ la concatenación.
 - (U, I) con $U = \mathbb{B}$, $I(e) = 1$ e $I(f) = H_{\wedge}$

Las siguientes estructuras no son modelo de F

- (U, I) con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 5$ e $I(f)$ como la suma.
- (U, I) con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como el producto.

Semántica: Satisfacibilidad de una fórmula

- Satisfacibilidad de una fórmula:

- Def.: Sea F una fórmula de L .

- F es **satisfacible** si tiene alguna realización
(i.e. existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A en $\mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
 - F es **insatisfacible** si no tiene ninguna realización
(i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$).

- Ejemplos:

- $(\forall y)R(x, y)$ es satisfacible

$\mathcal{I}_A((\forall y)R(x, y)) = 1$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 0$.

- $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\neg P(x)$ es insatisfacible.

Semántica: Satisfacibilidad y modelo

- Propiedades:

- Sea F una fórmula cerrada. Son equivalentes:

- F es satisfacible.
- F tiene modelo.

- Si F es insatisfacible, entonces no tiene ningún modelo.

- Existen fórmulas satisfacibles que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.

Por ejemplo, sea F la fórmula $x \neq y$.

La fórmula F es satisfacible

$$\mathcal{I}_A(F) = 1, \text{ siendo } \mathcal{I} = (\{p, q\}, I), A(x) = p, A(y) = q$$

La fórmula F no tiene modelo

Sea $\mathcal{I}$ una estructura. Existe una asignación A en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y)$.

Luego, $\mathcal{I}_A(F) = 0$ y $\mathcal{I} \not\models F$.

Semántica: Validez de una fórmula

- Validez de una fórmula:

- Def.: Sea F una fórmula de L .

- F es **válida** si toda estructura de L es modelo de F
(i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\models F$.
 - F no es válida si alguna estructura de L no es modelo de F
(i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ y alguna asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 0$). Se representa por $\not\models F$.

- Ejemplos:

- $(\exists x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$ es válida.
 - $(\forall y)R(x, y)$ no es válida.

$\mathcal{I}_A((\forall y)R(x, y)) = 0$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 5$.

- $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)P(y))$ es válida.

Semántica: Satisfacibilidad y validez

- Relaciones entre satisfacibilidad y validez:

- Prop.: F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.

F es válida

$\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$

$\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$

$\iff \neg F$ es insatisfacible.

- Si F es válida, entonces F es satisfacible.

F es válida

$\implies$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$

$\implies$ existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$

$\implies F$ es satisfacible.

- F es satisfacible $\not\Rightarrow \neg F$ es insatisfacible.

$(\forall x)P(x)$ es satisfacible.

modelo $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{a\}$

$\neg(\forall x)P(x)$ es satisfacible.

modelo $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{a\}$

Semántica: Realización de un conjunto de fórmulas

- Notación:
 - $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Realización de un conjunto de fórmulas:
 - Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L , $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.
 - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
Se representa por $\mathcal{I}_A \models S$.
 - $(\mathcal{I}, A)$ no es una realización de S si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$.
Se representa por $\mathcal{I}_A \not\models S$.
 - Ejemplos: Sea $S = \{(\forall y)R(x, y), (\forall y)f(x, y) = y\}$.
 - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S .
 - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de S .
 - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = \leq, f^I = *, A(x) = 0$ no es realización de S .

Semántica: Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Consistencia de un conjunto de fórmulas:

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas de L .

- S es **consistente** si S tiene alguna realización
(i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
 - S es **inconsistente** si S no tiene ninguna realización
(i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).

- Ejemplos:

- $S = \{(\forall y)R(x, y), (\forall y)f(x, y) = y\}$ es consistente .
 $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $R^I = \leq$, $f^I = +$, $A(x) = 0$ es realización de S .
 - $S = \{P(x) \rightarrow Q(x), (\exists y)P(y), \neg Q(x)\}$ es inconsistente.

Semántica: Modelo de un conjunto de fórmulas

- Modelo de un conjunto de fórmulas:
 - Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L .
 - $\mathcal{I}$ es un modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \models F$
(i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
Se representa por $\mathcal{I} \models S$.
 - $\mathcal{I}$ no es un modelo de S si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \not\models F$
(i.e. para alguna $F \in S$ y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
Se representa por $\mathcal{I} \not\models S$.
 - Ejemplos: Sea $S = \{R(e, y), f(e, y) = y\}$.
 - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de S .
 - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de S .
 - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = *, e^I = 0$ no es modelo de S .
 - $\mathcal{I} = (\{0, 1\}^*, I)$ con $R^I = \text{prefijo}, f^I = \text{concatenación y } e^I = \epsilon$ es modelo de S .

Semántica: Consistencia y modelo

- Propiedades:

- Sea S un conjunto de fórmulas cerradas. Son equivalentes:
 - S es consistente.
 - S tiene modelo.
- Si S es inconsistente, entonces no tiene ningún modelo.
- Existen conjuntos de fórmulas consistentes que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.

Por ejemplo, sea $S = \{x \neq y\}$.

El conjunto S es consistente

$\mathcal{I}_A \models S$, siendo $\mathcal{I} = (\{p, q\}, I)$, $A(x) = p$, $A(y) = q$

El conjunto S no tiene modelo

Sea $\mathcal{I}$ una estructura. Existe una asignación A en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y)$.

Luego, $\mathcal{I}_A(x \neq y) = 0$ y $\mathcal{I} \not\models F$.

Semántica: Consecuencia lógica

- Consecuencia lógica:

- Def.: Sean F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L .

- F es consecuencia lógica de S si todas las realizaciones de S lo son de F .
(i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
si $\mathcal{I}_A \models S$ entonces $\mathcal{I}_A \models F$).

- (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$).

- Se representa por $S \models F$.

- F no es consecuencia lógica de S si alguna realización de S no lo es de F .
(i.e. para alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que
 $\mathcal{I}_A \models S$ y $\mathcal{I}_A \not\models F$).

- (i.e. para alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que,
para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ y $\mathcal{I}_A(F) = 0$).

- Se representa por $S \not\models F$.

- Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.

- Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.

Semántica: Consecuencia lógica

- Ejemplos:

- $(\forall x)P(x) \models P(y)$

- $P(y) \not\models (\forall x)P(x)$

- $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1.$

- $(\forall x)P(x) \models (\exists y)P(y)$

- $(\exists x)P(x) \not\models (\forall y)P(y)$

- $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}$

- $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \mathbb{N}$ y $P^I = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\}$

- $(\exists x)(\forall y)Q(x, y) \models (\forall y)(\exists x)Q(x, y)$

- $(\forall y)(\exists x)Q(x, y) \not\models (\exists x)(\forall y)Q(x, y)$

- $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}, Q^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$

- $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \mathbb{N}, Q^I = <$

Semántica: Consecuencia lógica

- Ejemplos:

- $\{P(x) \rightarrow Q(x), P(c)\} \models Q(c)$
- $\{P(x) \rightarrow Q(x), Q(c)\} \not\models P(c)$
- $\{P(x) \rightarrow Q(x), \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
- $\{P(c), \neg P(d)\} \models c \neq d$

- Ejemplos: Se consideran las fórmulas

$$F_1 : (\forall x)R(x, x),$$

$$F_2 : (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)).$$

$$F_3 : (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y),$$

- $\{F_2, F_3\} \not\models F_1$

Contraejemplo: $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $R^I = \{(a, a)\}$

- $\{F_1, F_2\} \not\models F_3$

Contraejemplo: $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $R^I = U^2$

- $\{F_1, F_3\} \models F_2$

Semántica: Consecuencia lógica

- Propiedades:

- $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

$$S \models F$$

$\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$.

$\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$.

$\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathcal{I}_A(\neg H) = 0$.

$\iff S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

- Sean F una fórmula cerrada de L y S un conjunto de fórmulas cerradas de L .
Entonces, F es consecuencia lógica de S syss todos los modelos de S lo son de F .

Semántica: Equivalencia lógica

- Equivalencia lógica

- Def.: Sean F y G fórmulas de L . F y G son equivalentes si para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
Se representa por $F \equiv G$.

- Ejemplos:

- $P(x) \not\equiv P(y)$.

$$\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I) \text{ con } P^I = \{1\} \text{ y } A(x) = 1, A(y) = 2.$$

- $(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$.

- $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$.

- $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$.

$$\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I) \text{ con } P^I = \{1\} \text{ y } Q^I = \{2\}.$$

- Propiedades: Sean F y G fórmulas cerradas de L .

- $F \equiv G \text{ syss } \models F \leftrightarrow G$.

- $F \equiv G \text{ syss } F \models G \text{ y } G \models F$.

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
- M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
- C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 26–35.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 64–87.
- J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
- M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.