Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de eliminación del cuantificador universal**
  - Regla de eliminación del cuantificador universal:

    $$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]}\ \forall e$$

    donde $[x/t]$ es libre para F.
  - Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
  - Ejemplo 1: $P(c), (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$

1 :	actual y , P(y) , ∀x.(P(x)⟶¬Q(x))	premisas
2 :	P(y)⟶¬Q(y)	∀e 1.3,1.1
3 :	¬Q(y)	⟶e 2,1.2

  - Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \nvdash (\exists y)(y < y)$.

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de introducción del cuantificador universal**
  - **Regla de introducción del cuantificador universal:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \qquad\vdots \\ \quad F[x/x_0] \end{array}}}{(\forall x)F}\ \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

  - **Nota: Analogía con $\wedge$i.**
  - **Ejemplo 2: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∀x.P(x)	premisas
2 :	actual i	supuesto
3 :	P(i)⟶Q(i)	∀e 1.1,2
4 :	P(i)	∀e 1.2,2
5 :	Q(i)	⟶e 3,4
6 :	∀x.Q(x)	∀i 2–5

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de introducción del cuantificador existencial**
  - **Regla de introducción del cuantificador existencial:**

    $$\frac{F[x/t]}{(\exists x)F}\ \exists i$$

    donde $[x/t]$ es libre para F.
  - **Nota: Analogía con $\vee i_1$ y $\vee i_2$.**
  - **Ejemplo 3: $(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)P(x)$**

1 :	actual j , ∀x.P(x)	premisas
2 :	P(j)	∀e 1.2,1.1
3 :	∃x.P(x)	∃i 2,1.1

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de eliminación del cuantificador existencial**
  - **Regla de eliminación del cuantificador existencial:**

$$\frac{(\exists x)F \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \vdots \\ & G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

  - **Nota: Analogía con $\vee$e.**
  - **Ejemplo 4: $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∃x.P(x)	premisas
2 :	actual i , P(i)	supuestos
3 :	P(i)⟶Q(i)	∀e 1.1,2.1
4 :	Q(i)	⟶e 3,2.2
5 :	∃x.Q(x)	∃i 4,2.1
6 :	∃x.Q(x)	∃e 1.2,2−5

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 5:** $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$

1 :	$\forall x.(Q(x) \longrightarrow R(x))$, $\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$	premisas
2 :	actual i, $P(i) \wedge Q(i)$	supuestos
3 :	$Q(i) \longrightarrow R(i)$	$\forall$e 1.1,2.1
4 :	$Q(i)$	$\wedge$e 2.2
5 :	$P(i)$	$\wedge$e 2.2
6 :	$R(i)$	$\longrightarrow$e 3,4
7 :	$P(i) \wedge R(i)$	$\wedge$i 5,6
8 :	$\exists x.(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$i 7,2.1
9 :	$\exists x.(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$e 1.2,2−8

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 6:** $(\exists x)P(x), (\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \vdash (\forall y)Q(y)$

1 :	∃x.P(x) , ∀x.∀y.(P(x)⟶Q(y))	premisas
2 :	actual i	supuesto
3 :	actual i1 , P(i1)	supuestos
4 :	∀y.(P(i1)⟶Q(y))	∀e 1.2,3.1
5 :	P(i1)⟶Q(i)	∀e 4,2
6 :	Q(i)	⟶e 5,3.2
7 :	Q(i)	∃e 1.1,3−6
8 :	∀y.Q(y)	∀i 2−7

Equivalencias

- **Equivalencias:**
  - **Sean F y G fórmulas.**

    [1(a)] $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

    [1(b)] $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$

  - **Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.**

    [2(a)] $(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

    [2(b)] $(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$

    [2(c)] $(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$

    [2(d)] $(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.

  [3(a)] $(\forall x)F \land (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \land G)$

  [3(b)] $(\exists x)F \lor (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \lor G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [4(a)] $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$

  [4(b)] $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \vdash (\exists x)\neg F$

1 :	$\neg\forall x.P(x)$	premisa
2 :	$\neg\exists x.\neg P(x)$	supuesto
3 :	actual i	supuesto
4 :	$\neg P(i)$	supuesto
5 :	$\exists x.\neg P(x)$	$\exists$i 4,3
6 :	$\bot$	$\neg$e 5,2
7 :	$P(i)$	RAA 4–6
8 :	$\forall x.P(x)$	$\forall$i 3–7
9 :	$\bot$	$\neg$e 8,1
10 :	$\exists x.\neg P(x)$	RAA 2–9

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $(\exists x)\neg F \vdash \neg(\forall x)F$

1 :	$\exists x.\neg P(x)$	premisa
2 :	$\neg\neg\forall x.P(x)$	supuesto
3 :	$\forall x.P(x)$	$\neg\neg e$ 2
4 :	actual i, $\neg P(i)$	supuestos
5 :	$P(i)$	$\forall e$ 3,4.1
6 :	$\bot$	$\neg e$ 5,4.2
7 :	$\bot$	$\exists e$ 1,4–6
8 :	$\neg\forall x.P(x)$	RAA 2–7

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

1 :	$\boxed{\neg\forall x.P(x)}$	supuesto
2 :	$\boxed{\exists x.\neg P(x)}$	Conjecture $\neg\forall x.P(x) \vdash \exists x.\neg P(x)$ 1
3 :	$\neg\forall x.P(x) \longrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists x.\neg P(x)}$	supuesto
5 :	$\boxed{\neg\forall x.P(x)}$	Theorem $\exists x.\neg P(x) \vdash \neg\forall x.P(x)$ 4
6 :	$\exists x.\neg P(x) \longrightarrow \neg\forall x.P(x)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\neg\forall x.P(x) \longleftrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)(F \wedge G) \vdash (\forall x)F \wedge (\forall x)G$

1 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2 :	$\boxed{\text{actual } i1}$	supuesto
3 :	$P(i1) \wedge Q(i1)$	$\forall$e 1,2
4 :	$P(i1)$	$\wedge$e1 3
5 :	$\forall x.P(x)$	$\forall$i 2–4
6 :	$\boxed{\text{actual } i}$	supuesto
7 :	$P(i) \wedge Q(i)$	$\forall$e 1,6
8 :	$Q(i)$	$\wedge$e2 7
9 :	$\forall x.Q(x)$	$\forall$i 6–8
10 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\wedge$i 5,9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \vdash (\forall x)(F \wedge G)$

1 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	premisa
2 :	actual i	supuesto
3 :	∀x.P(x)	∧e 1
4 :	P(i)	∀e 3,2
5 :	∀x.Q(x)	∧e 1
6 :	Q(i)	∀e 5,2
7 :	P(i)∧Q(i)	∧i 4,6
8 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	∀i 2−7

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)(F \wedge G) \equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G$

1 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	supuesto
2 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	Theorem $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$ 1
3 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	supuesto
5 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	Theorem $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$ 4
6 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \longrightarrow \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longleftrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \lor (\exists x)G \vdash (\exists x)(F \lor G)$

1 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	premisa
2 :	∃x.P(x)	supuesto
3 :	actual i , P(i)	supuestos
4 :	P(i)∨Q(i)	∨i1 3.2
5 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃i 4,3.1
6 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃e 2,3−5
7 :	∃x.Q(x)	supuesto
8 :	actual i1 , Q(i1)	supuestos
9 :	P(i1)∨Q(i1)	∨i2 8.2
10 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃i 9,8.1
11 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∃e 7,8−10
12 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	∨e 1,2−6,7−11

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)(F \vee G) \vdash (\exists x)F \vee (\exists x)G$

1 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	premisa
2 :	actual i, $P(i) \vee Q(i)$	supuestos
3 :	$P(i)$	supuesto
4 :	$\exists x.P(x)$	$\exists$i 3,2.1
5 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\vee$ intro 4
6 :	$Q(i)$	supuesto
7 :	$\exists x.Q(x)$	$\exists$i 6,2.1
8 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\vee$ intro 7
9 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\vee$e 2.2,3–5,6–8
10 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\exists$e 1,2–9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

1 :	$\boxed{\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)}$	supuesto
2 :	$\boxed{\exists x.(P(x)\vee Q(x))}$	Theorem $\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x) \vdash \exists x.(P(x)\vee Q(x))$ 1
3 :	$\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)\longrightarrow\exists x.(P(x)\vee Q(x))$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\exists x.(P(x)\vee Q(x))}$	supuesto
5 :	$\boxed{\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)}$	Conjecture $\exists x.(P(x)\vee Q(x)) \vdash \exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)$ 4
6 :	$\exists x.(P(x)\vee Q(x))\longrightarrow\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\exists x.P(x)\vee\exists x.Q(x)\longleftrightarrow\exists x.(P(x)\vee Q(x))$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists x)(\exists y)F \vdash (\exists y)(\exists x)F$

1 :	∃x.∃y.P(x,y)	premisa
2 :	actual i, ∃y.P(i,y)	supuestos
3 :	actual i1, P(i,i1)	supuestos
4 :	∃x.P(x,i1)	∃i 3.2,2.1
5 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃i 4,3.1
6 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 2.2,3−5
7 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 1,2−6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

1 :	$\boxed{\exists x.\exists y.P(x,y)}$	supuesto
2 :	$\boxed{\exists y.\exists x.P(x,y)}$	Conjecture $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 1
3 :	$\exists x.\exists y.P(x,y) \longrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$	$\longrightarrow$i 1−2
4 :	$\boxed{\exists y.\exists x.P(x,y)}$	supuesto
5 :	$\boxed{\exists x.\exists y.P(x,y)}$	Conjecture $\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y)$ 4
6 :	$\exists y.\exists x.P(x,y) \longrightarrow \exists x.\exists y.P(x,y)$	$\longrightarrow$i 4−5
7 :	$\exists x.\exists y.P(x,y) \longleftrightarrow \exists y.\exists x.P(x,y)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Reglas de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- Ejemplo:

1	$(x + 1) = (1 + x)$	premisa
2	$(x + 1 > 1) \rightarrow (x + 1 > 0)$	premisa
3	$(1 + x > 1) \rightarrow (1 + x > 0)$	=e 1,2

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	=e 2,1

Reglas de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:

$$\frac{}{t = t} = i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	=i
3	$t_2 = t_1$	=e 1,2

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.