

Tema 8: Formas normales. Cláusulas

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordon Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Equivalencias

- Equivalencia lógica
 - Prop.: $F \equiv G \text{ syss } \models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
 - Reflexiva: $F \equiv F$
 - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
 - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
 - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G , entonces la fórmula obtenida, F' , es lógicamente equivalente a F .
 - Ejemplo:
$$\begin{aligned} F &= (\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) \\ G &= (\forall x)P(x) \\ G' &= (\forall y)P(y) \\ F' &= (\forall y)P(y) \rightarrow (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

Forma rectificada

- Fórmula en forma rectificada:

- Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.

- Ejemplos: $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(z, y)$ está en forma rectificada
 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x, y)$ no está en forma rectificada
 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(z, x)$ no está en forma rectificada

- Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.

- Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F , entonces

$$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$$

$$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y].$$

- Ejemplos de rectificación:

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(z, x) \equiv (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall u)Q(z, u)$$

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x, y) \equiv (\forall z)P(z) \rightarrow (\forall y)Q(x, y)$$

Forma normal prenexa

- Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.

$(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)$ se llama el **prefijo** de F y G se llama la **matriz** de F .

- Ejemplos:

Fórmula	¿está en FNP?
$\neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)]$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)]$	sí
$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)]$	sí
$(\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)])$	no
$(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))]$	sí

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa:
 - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias

$$(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y] \quad (1)$$

$$(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y] \quad (2)$$

donde y es una variable que no ocurre libre en F .

2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \quad (3)$$

3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \quad (4)$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Algoritmo (cont.)

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \quad (5)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \quad (6)$$

$$\neg\neg F \equiv F \quad (7)$$

$$\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F \quad (8)$$

$$\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F \quad (9)$$

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (11)$$

$$(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (12)$$

$$(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (13)$$

$$(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (14)$$

$$G \wedge (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (15)$$

$$G \vee (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (16)$$

$$G \wedge (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (17)$$

$$G \vee (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (18)$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{aligned}& \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] \\ \equiv & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)] && [\text{por (1)}] \\ \equiv & \neg(\exists x)[\neg P(x) \vee (\forall y)P(y)] && [\text{por (4)}] \\ \equiv & (\forall x)[\neg(\neg P(x) \vee (\forall y)P(y))] && [\text{por (9)}] \\ \equiv & (\forall x)[\neg\neg P(x) \wedge \neg(\forall y)P(y)] && [\text{por (6)}] \\ \equiv & (\forall x)[P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)] && [\text{por (7 y 8)}] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)] && [\text{por (17)}]\end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{aligned}& (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\forall x)[P(x) \vee (\exists y)Q(y)] && [\text{por (12)}] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)] && [\text{por (18)}]\end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma normal prenexa de

$$\begin{aligned}& (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\exists y)[(\forall x)P(x) \vee Q(y)] && [\text{por (18)}] \\ \equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)] && [\text{por (12)}]\end{aligned}$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{aligned} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall y)[Q(y) \rightarrow R(y)] \rightarrow (\forall z)[P(z) \rightarrow R(z)]) \quad [\text{por (1)}] \\ \equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \vee (\forall z)[\neg P(z) \vee R(z)]) \quad [\text{por (4)}] \\ \equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \neg(\forall z)[\neg P(z) \vee R(z)] \quad [\text{por (6)}] \\ \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (\exists z)[\neg(\neg P(z) \vee R(z))] \quad [\text{por (7, 8)}] \\ \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (\exists z)[\neg\neg P(z) \wedge \neg R(z)] \quad [\text{por (6)}] \\ \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (\exists z)[P(z) \wedge \neg R(z)] \quad [\text{por (7)}] \\ \equiv & (\exists z)[((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por (17)}] \\ \equiv & (\exists z)[(\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por (11)}] \\ \equiv & (\exists z)(\forall x)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\forall y)[\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por (11)}] \\ \equiv & (\exists z)(\forall x)[(\forall y)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por (15)}] \\ \equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por (11)}] \end{aligned}$$

Forma normal prenexa conjuntiva

- Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva
 - Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
 - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
 1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
 2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
- Ejemplo de cálculo de una FNPC de $(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \quad [\text{por (19)}] \end{aligned}$$

Forma de Skolem

- Forma de Skolem:

- Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.

- Ejemplos: $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ no está en forma de Skolem
 $(\forall x)P(x, f(x))$ sí está en forma de Skolem
 $(\exists x)Q(x)$ no está en forma de Skolem
 $Q(a)$ sí está en forma de Skolem

- Equisatisfacibilidad:

- Def.: Las fórmulas F y G son **equisatisfacible** si:
 F es satisfacible syss G es satisfacible.

Se representa por $F \equiv_{sat} G$

- Ejemplos: $(\exists x)Q(x) \equiv_{sat} Q(a)$
 $(\exists x)Q(x) \not\equiv Q(a)$
 $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \equiv_{sat} (\forall x)P(x, f(x))$
 $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \not\equiv (\forall x)P(x, f(x))$

Forma de Skolem

- Propiedades:
 - Si a es una constante que no ocurre en F , entonces $(\exists x)F \equiv_{sat} F[x/a]$.
 - Si g es un símbolo de función n -aria que no ocurre en F , entonces $(\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists x)F \equiv_{sat} (\forall x_1) \dots (\forall x_n)F[x/g(x_1, \dots, x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
 - Algoritmo: Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es
$$\text{Sko}(F) = \begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \text{ y } a \text{ es una nueva constante} \\ & \text{que no ocurre en } F \text{ (constante de Skolem);} \\ \text{Sko}(G[x/f(x_1, \dots, x_n)]), & \text{si } F \text{ es } (\forall x_1) \dots (\forall x_n)(\exists x)G \text{ y } f \text{ es un símbolo} \\ & \text{de función } n\text{-aria que no ocurre en } F \\ & \text{(función de Skolem);} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$
 - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Forma de Skolem: Cálculo de forma de Skolem

- Ejemplos de cálculo de forma de Skolem:

- Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} & \text{Sko}((\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)) \\ &= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a, y, z, u, v, w)) \\ &= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a, y, z, f(y, z), v, w)) \\ &= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))) \\ &= (\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)) \end{aligned}$$

- Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} & \text{Sko}((\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y)]) \\ &= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a, w) \vee Q(f(x), h(x))]) \\ &= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)[\neg P(a, g(x, z)) \vee Q(f(x), h(x))]) \\ &= (\forall x)(\forall z)[\neg P(a, g(x, z)) \vee Q(f(x), h(x))] \end{aligned}$$

Forma de Skolem: Cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)] \quad [\text{por página ??}] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))] \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{aligned} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por página ??}] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x))] \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\begin{aligned} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por página ??}] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)] \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\begin{aligned} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por p. ??}] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \end{aligned}$$

Lógica clausal: sintaxis

- Sintaxis de la lógica clausal

- Un **átomo** es una fórmula atómica.

Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$

- Un **literal** es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).

Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$

- Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.

Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$

- La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.

La cláusula vacía se representa por $\square$.

- Conjuntos finitos de cláusulas.

Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$

Lógica clausal: semántica

- Fórmulas correspondientes:

- Def.: La **fórmula correspondiente a la cláusula** $\{L_1, \dots, L_n\}$ es

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[L_1 \vee \dots \vee L_n],$$

donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.

- Def.: La **fórmula correspondiente a la cláusula** $\square$ es $\perp$.

- Def.: La **fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas**

$$\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\} \text{ es}$$

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$

donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)$.

- Def.: La **fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas** $\emptyset$ es $\top$.

- Semántica:

- Def.: En cualquier interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\perp) = 0$.

- Def.: Los **conceptos semánticos** relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una **forma clausal de una fórmula** F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que una forma clausal de F :
 1. Sea $F_1 = (\exists y_1) \dots (\exists y_n) F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F .
 2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página ??.
 3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
$$(\forall x_1) \dots (\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
 4. Sea $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$.
- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))] \quad [\text{pág. ??}] \\ \equiv & \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\} \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{aligned} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x))] \quad [\text{pág. ??}] \\ \equiv & \{\{P(x), Q(f(x))\}\} \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$\begin{aligned} & (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)] \quad [\text{pág. ??}] \\ \equiv & \{\{P(x), Q(a)\}\} \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{aligned} & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \quad [\text{pág. ??}] \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\} \end{aligned}$$

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{aligned}
 & \neg(\exists x)[P(x, z) \vee (\forall y)Q(x, f(y))] \vee (\forall y)P(g(x, y), z) \\
 \equiv_{sat} & (\exists z)[\neg(\exists x)[P(x, z) \vee (\forall y)Q(x, f(y))] \vee (\forall y)P(g(x, y), z)] & [1] \\
 \equiv & (\exists z)[\neg(\exists x)[P(x, z) \vee (\forall y)Q(x, f(y))] \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(1)] \\
 \equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg(P(x, z) \vee (\forall y)Q(x, f(y)))] \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(9)] \\
 \equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg P(x, z) \wedge \neg(\forall y)Q(x, f(y))] \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(6)] \\
 \equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg P(x, z) \wedge (\exists y)\neg Q(x, f(y))] \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(8)] \\
 \equiv & (\exists z)(\forall x)[(\neg P(x, z) \wedge (\exists y)\neg Q(x, f(y))) \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(12)] \\
 \equiv & (\exists z)(\forall x)[(\exists y)[\neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))] \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(17)] \\
 \equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)[(\neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))) \vee (\forall w)P(g(x, w), z)] & [(14)] \\
 \equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x, z) \wedge \neg Q(x, f(y))) \vee P(g(x, w), z)] & [(16)] \\
 \equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x, z) \vee P(g(x, w), z)) \wedge (\neg Q(x, f(y)) \vee P(g(x, w), z))] & [(20)] \\
 \equiv_{sat} & (\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x, a) \vee P(g(x, w), a)) \wedge (\neg Q(x, f(y)) \vee P(g(x, w), a))] & [Sko] \\
 \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall w)[(\neg P(x, a) \vee P(g(x, w), a)) \wedge (\neg Q(x, f(h(x))) \vee P(g(x, w), a))] & [Sko] \\
 \equiv & \{\{\neg P(x, a), P(g(x, w), a)\}, \{\neg Q(x, f(h(x))), P(g(x, w), a)\}\}
 \end{aligned}$$

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\begin{aligned}
 & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)) \\
 \equiv & \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists y)P(y) \rightarrow (\exists z)Q(z)) \quad [(2)] \\
 \equiv & \neg(\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \vee (\exists z)Q(z)) \quad [(4)] \\
 \equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \vee (\exists z)Q(z)) \quad [(4)] \\
 \equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge \neg(\exists z)Q(z) \quad [(6)] \\
 \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge \neg(\exists z)Q(z) \quad [(7)] \\
 \equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge (\exists y)P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z) \quad [(9)] \\
 \equiv & (\exists y)[(\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)] \wedge (\forall z)\neg Q(z) \quad [(17)] \\
 \equiv & (\exists y)[((\forall x)[\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)] \quad [(13)] \\
 \equiv & (\exists y)[(\forall x)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)]] \wedge (\forall z)\neg Q(z) \quad [(11)] \\
 \equiv & (\exists y)(\forall x)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)) \wedge (\forall z)\neg Q(z)] \quad [(11)] \\
 \equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z)] \quad [(15)] \\
 \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \vee Q(x) \wedge P(a)) \wedge \neg Q(z)] \quad [(15)] \\
 \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}
 \end{aligned}$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
 - Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacible si:
 S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas
 - Def.: Una **forma clausal de un conjunto de fórmulas** S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S .
 - Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
 - Ejemplo: Una forma clausal de
$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x), \neg(\exists x)Q(x)\}$$
es
$$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

Reducción de consecuencia a insatisfacibilidad de cláusulas

- Reducción de consecuencia a insatisfacibilidad de cláusulas:
 - Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$. Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
 1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
 2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.
 3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
 - Ejemplos:
 - Ejemplo 1:
$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$$
$$\text{syss } \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} \text{ es inconsistente.}$$
 - Ejemplo 2:
$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$$
$$\text{syss } \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\} \text{ es inconsistente.}$$

Bibliografía

- M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 101–106.
- S. Hölldobler *Computational logic*. (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
- R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden*. (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 153–160.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.