

Ejercicio 9.1. Demostrar o refutar, mediante resolución y tableros semánticos, cada una de las siguientes fórmulas:

1. $(\exists x)(\forall y)R(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)R(x, y)$
2. $(\forall x)(\exists y)R(x, y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)R(x, y)$
3. $(\exists x)(P(x) \rightarrow (\forall y)P(y))$
4. $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$
5. $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$
6. $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

Ejercicio 9.2. Se consideran las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \text{transitiva} & := (\forall x)(\forall y)(\forall z)(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \\ \text{simetrica} & := (\forall x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \\ \text{reflexiva} & := (\forall x)R(x, x) \\ \text{notrivial} & := (\forall x)(\exists y)R(x, y) \end{aligned}$$

1. Demostrar que $\{\text{transitiva}, \text{simetrica}\} \not\models \text{reflexiva}$.
2. Demostrar que $\{\text{transitiva}, \text{simetrica}, \text{notrivial}\} \models \text{reflexiva}$.

Ejercicio 9.3.[Ex. Septiembre 2003] Hallar las formas prenex, de Skolem y clausal de la fórmula:

$$\neg \exists x \forall z [P(x) \rightarrow \neg Q(z)] \vee [\exists z A(y, z) \rightarrow \exists u B(y, u)]$$

Ejercicio 9.4.[Ex. Septiembre 2003] Se considera el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{\forall x (P(a, x) \rightarrow P(b, f(x))), \forall x (P(f(x), x) \rightarrow \forall z P(z, b)), P(a, f(a)) \wedge P(f(b), b)\}$$

Probar, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models \exists x (P(x, a) \wedge P(f(x), b))$.

Ejercicio 9.5.[Ex. Septiembre 2003] Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.
5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.

Se pide:

- (a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado: $D(x, y)$: x derrota a y , $H(x, y)$: x hereda la corona de y , $R(x)$: x es rey, $P(x, y)$: x es el primogénito de y . Las constantes a, b, c denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.
- (b) A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.

Ejercicio 9.6.[Ex. Junio 2003] Consideramos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{P(c, a) \rightarrow \forall z P(z, b), \forall x (P(f(x), x) \rightarrow \forall z P(z, x)), \neg P(b, c)\}$$

Probar, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a), a) \vee \neg P(f(b), b)$.

Ejercicio 9.7.[Ex. Junio 2003] Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

Se pide:

- (a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: x es un delegado, $Ap(x, y)$: x aprueba la asignatura y . Las constantes a, b, m denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.
- (b) Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.
- (c) Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.