

Tema 9: Resolución en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordon Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Introducción

- Ejemplos de consecuencia mediante resolución:

- Ejemplo 1: $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$

syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es inconsistente.

1 $\{\neg P(x), Q(x)\}$ Hipótesis

2 $\{P(a)\}$ Hipótesis

3 $\{\neg Q(z)\}$ Hipótesis

4 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$

5 $\square$ Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [z/a]$

- Ejemplo 2: $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$

syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

1 $\{\neg P(x), Q(x)\}$ Hipótesis

2 $\{\neg Q(y), R(y)\}$ Hipótesis

3 $\{P(a)\}$ Hipótesis

4 $\{\neg R(a)\}$ Hipótesis

5 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a]$

6 $\{R(a)\}$ Resolvente de 2 y 5 con $\sigma = [y/a]$

5 $\square$ Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = \epsilon$

Unificación: Unificadores

- Unificador:

- Def.: La sustitución σ es un **unificador** de los términos t_1 y t_2 si $t_1\sigma = t_2\sigma$.
- Def.: Los términos t_1 y t_2 son **unificables** si tienen algún unificador.
- Def.: t es una **instancia común** de t_1 y t_2 si existe una sustitución σ tal que $t = t_1\sigma = t_2\sigma$.
- Ejemplos:

t_1	t_2	Unificador	Instancia común
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(z), y/z]$	$f(g(z), g(z))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(y), z/y]$	$f(g(y), g(y))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(g(a), g(a))$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[x/a, y/a]$	$f(a, a)$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[y/x]$	$f(x, x)$
$f(x, y)$	$g(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x, x)$	$f(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x)$	$f(g(x))$	No tiene	No tiene

- Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Unificación: Composición de sustituciones

- Composición de sustituciones:

- Def.: La **composición** de las sustituciones σ_1 y σ_2 es la sustitución $\sigma_1\sigma_2$ definida por $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$, para toda variable x .

- Ejemplo: Si $\sigma_1 = [x/f(z, a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces

- $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z, a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$

- $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

- $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$

- $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w), a), y/w, z/g(w)]$.

- Def.: La **substitución identidad** es la sustitución ϵ tal que, para todo x , $x\epsilon = x$.

- Propiedades:

1. Asociativa: $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$

2. Neutro: $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$.

Unificación: Comparación de sustituciones

- Comparación de sustituciones:

- Def.: La sustitución σ_1 es **más general que** la σ_2 si existe una sustitución σ_3 tal que $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$, Se representa por $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
- Def.: Las sustituciones σ_1 y σ_2 son **equivalentes** si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Se representa por $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.
- Ejemplos: Sean $\sigma_1 = [x/g(z), y/z]$, $\sigma_2 = [x/g(y), z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$. Entonces,
 1. $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
 2. $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
 3. $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
 4. $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
 5. $\sigma_3 \leq \sigma_1$
- Ejemplo: $[x/a, y/a] \leq [y/x]$, ya que $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$.

Unificación: Unificador de máxima generalidad

- Unificador de máxima generalidad:
 - Def.: La sustitución σ es un **unificador de máxima generalidad (UMG)** de los términos t_1 y t_2 si
 - σ es un unificador de t_1 y t_2 .
 - σ es más general que cualquier unificador de t_1 y t_2 .
 - Ejemplos:
 1. $[x/g(z), y/z]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
 2. $[x/g(y), z/y]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
 3. $[x/g(a), y/a]$ no es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
 - Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Unificación: Algoritmo de unificación

- Notación de lista:
 - $(a_1, \dots, a_n)$ representa una lista cuyos elementos son $a_1, \dots, a_n$.
 - $(a|R)$ representa una lista cuyo primer elemento es a y resto es R .
 - $()$ representa la lista vacía.
- Unificadores de listas de términos:
 - Def.: σ es un **unificador** de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$.
 - Def.: $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ son **unificables** si tienen algún unificador.
 - Def.: σ es un **unificador de máxima generalidad (UMG)** de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ más general que cualquier otro.
- Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:
 - $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$.
- Algoritmo de unificación de listas de términos:
 - Entrada: Una lista de ecuaciones $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$ y una sustitución σ .
 - Salida: Un UMG de las listas $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$, si son unificables;
“No unificables”, en caso contrario.

Unificación: Algoritmo de unificación

- Procedimiento $\text{unif}(L, \sigma)$:

1. Si $L = ()$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \sigma$.
2. Si $L = (t = t|L')$, entonces $\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}(L', \sigma)$.
3. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1, \dots, t'_m)|L')$, entonces
$$\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}((t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m|L'), \sigma).$$
4. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x no aparece en t , entonces
$$\text{unif}(L, \sigma) = \text{unif}(L'[x/t], \sigma[x/t]).$$
5. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x aparece en t , entonces
$$\text{unif}(L, \sigma) = \text{“No unificables”}.$$
6. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1, \dots, t'_m)|L')$, entonces
$$\text{unif}(L, \sigma) = \text{“No unificables”}.$$
7. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1, \dots, t'_p)|L')$ y $m \neq p$, entonces
$$\text{unif}(L, \sigma) = \text{“No unificables”}.$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- Algoritmo de unificación de dos términos:

- Entrada: Dos términos t_1 y t_2 .
- Salida: Un UMG de t_1 y t_2 , si son unificables;
“No unificables”, en caso contrario.
- Procedimiento: $\text{unif}((t_1 = t_2), \epsilon)$.
- Ejemplo 1: Unificar $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, g(z)) = f(g(y), x)), \epsilon) \\ = & \text{unif}((x = g(y), g(z) = x), \epsilon) && \text{por 3} \\ = & \text{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \epsilon[x/g(y)]) && \text{por 4} \\ = & \text{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)]) \\ = & \text{unif}((z = y), [x/g(y)]) && \text{por 3} \\ = & \text{unif}(), [x/g(y)][z/y] && \text{por 4} \\ = & \text{unif}(), [x/g(y), z/y] \\ = & [x/g(y), z/y] && \text{por 1} \end{aligned}$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- Ejemplo 2: Unificar $f(x, b)$ y $f(a, y)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, b) = f(a, y)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = a, b = y), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((b = y)[x/a], \epsilon[x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((b = y), [x/a]) \\ &= \text{unif}(), [x/a][y/b]) && \text{por 4} \\ &= [x/a, y/b]) && \text{por 1} \end{aligned}$$

- Ejemplo 3: Unificar $f(x, x)$ y $f(a, b)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, x) = f(a, b)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = a, x = b), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((x = b)[x/a], \epsilon[x/a]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((a = b), [x/a]) \\ &= \text{"No unificable"} && \text{por 6} \end{aligned}$$

- Ejemplo 4: Unificar $f(x, g(y))$ y $f(y, x)$:

$$\begin{aligned} & \text{unif}((f(x, g(y)) = f(y, x)), \epsilon) \\ &= \text{unif}((x = y, g(y) = x), \epsilon) && \text{por 3} \\ &= \text{unif}((g(y) = x)[x/y], \epsilon[x/y]) && \text{por 4} \\ &= \text{unif}((g(y) = y), [x/y]) \\ &= \text{"No unificable"} && \text{por 5} \end{aligned}$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- Ejemplo 5: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, z)$

$$\begin{aligned} & \text{unif}((j(w, a, h(w)) = j(f(x, y), x, z))\epsilon) \\ = & \text{unif}((w = f(x, y), a = x, h(w) = z), \epsilon) && \text{por 3} \\ = & \text{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x, y)], \epsilon[w/f(x, y)]) && \text{por 4} \\ = & \text{unif}((a = x, h(f(x, y)) = z), [w/f(x, y)]) \\ = & \text{unif}((h(f(x, y)) = z)[x/a], [w/f(x, y)][x/a]) && \text{por 4} \\ = & \text{unif}((h(f(a, y)) = z), [w/f(a, y), x/a]) \\ = & \text{unif}(), [w/f(a, y), x/a][z/h(f(a, y))]) && \text{por 4} \\ = & [w/f(a, y), x/a, z/h(f(a, y))] && \text{por 1} \end{aligned}$$

- Ejemplo 6: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, y)$

$$\begin{aligned} & \text{unif}((j(w, a, h(w)) = j(f(x, y), x, y))\epsilon) \\ = & \text{unif}((w = f(x, y), a = x, h(w) = y), \epsilon) && \text{por 3} \\ = & \text{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x, y)], \epsilon[w/f(x, y)]) && \text{por 4} \\ = & \text{unif}((a = x, h(f(x, y)) = y), [w/f(x, y)]) \\ = & \text{unif}((h(f(x, y)) = y)[x/a], [w/f(x, y)][x/a]) && \text{por 4} \\ = & \text{unif}((h(f(a, y)) = y), [w/f(a, y), x/a]) \\ = & \text{"No unificable"} && \text{por 5} \end{aligned}$$

Resolución: Separación de variables

- Separación de variables
 - Def.: La sustitución $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es un **renombramiento** si todos los t_i son variables.
 - Prop.: Si θ es un renombramiento, entonces $C \equiv C\theta$.
 - Def.: Las cláusulas C_1 y C_2 **están separadas** si no tienen ninguna variable común.
 - Def.: Una **separación de las variables de C_1 y C_2** es un par de renombramientos (θ_1, θ_2) tales que $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ están separadas.
 - Ejemplo: Una separación de variables de $C_1 = \{P(x), Q(x, y)\}$ y $C_2 = \{R(f(x, y))\}$ es $(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2])$.

Resolución: Resolvente binaria

- Resolución binaria:

- Def.: La cláusula C es una resolvente binaria de las cláusulas C_1 y C_2 si existen una separación de variables (θ_1, θ_2) de C_1 y C_2 , un literal $L_1 \in C_1$, un literal $L_2 \in C_2$ y un UMG σ de $L_1\theta_1$ y $L_2^c\theta_2$ tales que

$$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$

- Ejemplo: Sean

$$C_1 = \{\neg P(x), Q(f(x))\},$$

$$C_2 = \{\neg Q(x), R(g(x))\},$$

$$L_1 = Q(f(x)),$$

$$L_2 = \neg Q(x),$$

$$\theta_1 = [x/x_1],$$

$$\theta_2 = [x/x_2],$$

$$L_1\theta_1 = Q(f(x_1)),$$

$$L_2^c\theta_2 = Q(x_2),$$

$$\sigma = [x_2/f(x_1)]$$

Entonces, $C = \{\neg P(x_1), R(g(f(x_1)))\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2 .

Resolución: Factorización

- Factorización:

- Def.: La cláusula C es un factor de la cláusula D si existen dos literales L_1 y L_2 en D que son unificables y $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$ donde σ es un UMG de L_1 y L_2 .

- Ejemplo: Sean

$$D = \{P(x, y), P(y, x), Q(a)\}$$

$$L_1 = P(x, y)$$

$$L_2 = P(y, x)$$

$$\sigma = [y/x]$$

Entonces,

$$C = \{P(x, x), Q(a)\} \text{ es un factor de } D.$$

Resolución

- Ejemplos de refutación por resolución:

- Refutación de $S = \{\{\neg P(x, f(x, y))\}, \{P(a, z), \neg Q(z, v)\}, \{Q(u, a)\}\}$

- 1 $\{\neg P(x, f(x, y))\}$ Hipótesis
- 2 $\{P(a, z), \neg Q(z, v)\}$ Hipótesis
- 3 $\{Q(u, a)\}$ Hipótesis
- 4 $\{\neg Q(f(a, y), v)\}$ Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a, z/f(a, y)]$
- 5 $\square$ Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [u/f(a, y), v/a]$

- Refutación de $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$

- 1 $\{P(x)\}$ Hipótesis
- 2 $\{\neg P(f(x))\}$ Hipótesis
- 3 $\square$ Resolvente de 1 y 2 con $\theta_1 = \epsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

- Refutación de $S = \{\{P(x, y), P(y, x)\}, \{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}\}$

- 1 $\{P(x, y), P(y, x)\}$ Hipótesis
- 2 $\{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}$ Hipótesis
- 3 $\{P(x, x)\}$ Factor de 1 con $[y/x]$
- 4 $\{\neg P(u, u)\}$ Factor de 2 con $[v/u]$
- 5 $\square$ Resolvente de 3 y 4 con $[x/u]$

Resolución

- Definiciones

- Sea S un conjunto de cláusulas.
- La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
 - $C_i \in S$;
 - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
 - existe $j < i$ tal que C_i es un factor de C_j
- La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S .
- Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S .
- Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S .

Resolución

- Demostraciones por resolución

- Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$. Una **demostración por resolución** de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.

- Def.: La fórmula F es **demostrable por resolución** a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.

- Ejemplo: (tema 8 p. 21) $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Res} (\exists x)Q(x)$

1 $\{\neg P(x), Q(x)\}$ Hipótesis

2 $\{P(a)\}$ Hipótesis

3 $\{\neg Q(z)\}$ Hipótesis

4 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$

5 $\square$ Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$

Resolución

- Ejemplo: (tema 8 p. 21)

$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \vdash_{Res} (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]\}$$

- 1 $\{\neg P(x), Q(x)\}$ Hipótesis
- 2 $\{\neg Q(y), R(y)\}$ Hipótesis
- 3 $\{P(a)\}$ Hipótesis
- 4 $\{\neg R(a)\}$ Hipótesis
- 5 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$
- 6 $\{R(a)\}$ Resolvente de 2 y 5 con $[y/a]$
- 5 $\square$ Resolvente de 6 y 4 con

- Ejemplo: (tema 6 p. 55) $\vdash_{Res} (\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall y)P(y)]$

- 1 $\{P(x)\}$ Hipótesis
- 2 $\{\neg P(f(x))\}$ Hipótesis
- 3 $\square$ Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

Resolución

- Ejemplo: $\vdash_{Res} (\forall x)(\exists y)\neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y))$

– Forma clausal:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)(\exists y)\neg(P(y, x) \leftrightarrow \neg P(y, y)) \\ \equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((P(y, x) \rightarrow \neg P(y, y)) \wedge (\neg P(y, y) \rightarrow P(y, x))) \\ \equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (\neg\neg P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)\neg\neg((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv & (\exists x)(\forall y)((\neg P(y, x) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, x))) \\ \equiv_{sat} & (\forall y)((\neg P(y, a) \vee \neg P(y, y)) \wedge (P(y, y) \vee P(y, a))) \\ \equiv & \{\{\neg P(y, a), \neg P(y, y)\}, \{P(y, y), P(y, a)\}\} \end{aligned}$$

– Refutación:

- 1 $\{\neg P(y, a), \neg P(y, y)\}$ Hipótesis
- 2 $\{P(y, y), P(y, a)\}$ Hipótesis
- 3 $\{\neg P(a, a)\}$ Factor de 1 con $[y/a]$
- 4 $\{\neg P(a, a)\}$ Factor de 2 con $[y/a]$
- 5 $\square$ Resolvente de 3 y 4

Resolución

- Ejemplo (Paradoja del barbero de Russell): En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: “El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas”. Demostrar que la norma es inconsistente.

– Representación:

$$(\forall x)[afeita(b, x) \leftrightarrow \neg afeita(x, x)]$$

– Forma clausal:

$$\begin{aligned} & (\forall x)[afeita(b, x) \leftrightarrow \neg afeita(x, x)] \\ \equiv & (\forall x)[(afeita(b, x) \rightarrow \neg afeita(x, x)) \wedge (\neg afeita(x, x) \rightarrow afeita(b, x))] \\ \equiv & (\forall x)[(\neg afeita(b, x) \vee \neg afeita(x, x)) \wedge (\neg \neg afeita(x, x) \vee afeita(b, x))] \\ \equiv & (\forall x)[(\neg afeita(b, x) \vee \neg afeita(x, x)) \wedge (afeita(x, x) \vee afeita(b, x))] \\ \equiv & \{\{\neg afeita(b, x), \neg afeita(x, x)\}, \{afeita(x, x), afeita(b, x)\}\} \end{aligned}$$

– Refutación:

- | | | |
|---|--|-------------------------|
| 1 | $\{\neg afeita(b, x), \neg afeita(x, x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{afeita(x, x), afeita(b, x)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg afeita(b, b)\}$ | Factor de 1 con $[x/b]$ |
| 4 | $\{afeita(b, b)\}$ | Factor de 2 con $[x/b]$ |
| 5 | $\square$ | Resolvente de 3 y 4 |

Adecuación y completitud de la resolución

- Propiedades:

- Si C es una resolvente de C_1 y C_2 , entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
- Si D es un factor de C entonces $C \models D$.
- Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
- Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución, entonces S es inconsistente.
- Teor.: El cálculo de resolución (para la lógica de primer orden sin igualdad) es adecuado y completo; es decir,

$$\text{Adecuado: } S \vdash_{Res} F \implies S \models F$$

$$\text{Completo: } S \models F \implies S \vdash_{Res} F$$

Interpretaciones de Herbrand

- Def.: El **universo de Herbrand de L** es el conjunto de los términos básicos de L . Se representa por $\text{UH}(L)$.
- Def.: Una interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ de L es una **interpretación de Herbrand** si
 - U es el universo de Herbrand de L ;
 - $I(c) = c$, para cada constante c de L ;
 - $I(f) = f$, para cada símbolo de función f de L .
- Def.: La **base de Herbrand de L** es el conjunto de los átomos básicos de L . Se representa por $\text{BH}(L)$.
- Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.
- Ejemplo: Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$, entonces las interpretaciones de Herbrand de L son

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$I_n(P)$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, c\}$
IH_n	$\emptyset$	$\{P(c)\}$	$\{P(b)\}$	$\{P(b), P(c)\}$	$\{P(a)\}$	$\{P(a), P(c)\}$	$\{P(a), P(b)\}$	$\{P(a), P(b), P(c)\}$

Modelos de Herbrand

- Modelos de Herbrand:

- Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
- Def.: Un **modelo de Herbrand de una fórmula F** es una interpretación de Herbrand de F que es modelo de F .
- Def.: Un **modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas S** es una interpretación de Herbrand de S que es modelo de S .
- Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}$, $\{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$.
- Ejemplo: Sea $S = \{(\forall x)(\forall y)[Q(b, x) \rightarrow P(a) \vee R(y)], P(b) \rightarrow \neg(\exists z)(\exists u)Q(z, u)\}$.
Entonces, $\text{UH}(S) = \{a, b\}$
 $\text{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), R(a), R(b)\}$
Un modelo de Herbrand de S es $\{P(a)\}$.

Cálculo de modelo de Herbrand

- Cálculo de modelo de Herbrand

- Ejemplo 1: Cálculo de modelo de Herbrand de $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], P(a), \neg Q(b)\}$

- 1 $\{\neg P(x), Q(x)\}$ Hipótesis
- 2 $\{P(a)\}$ Hipótesis
- 3 $\{\neg Q(b)\}$ Hipótesis
- 4 $\{Q(a)\}$ Resolvente de 1 y 2
- 5 $\{\neg P(b)\}$ Resolvente de 1 y 3

Modelo de Herbrand: $U = \{a, b\}, I(P) = \{a\}, I(Q) = \{a\}$.

- Ejemplo 2: Cálculo de modelo de Herbrand de $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow P(s(x))], P(0)\}$

- 1 $\{\neg P(x), P(s(x))\}$ Hipótesis
- 2 $\{P(0)\}$ Hipótesis
- 3 $\{P(s(0))\}$ Resolvente de 1 y 2
- 4 $\{P(s(s(0)))\}$ Resolvente de 1 y 3
- $\vdots$ $\vdots$

Modelo de Herbrand: $U = \{0, s(0), s(s(0)), \dots\}$
 $I(P) = \{P(0), P(s(0)), P(s(s(0))), \dots, \}$

Determinación de no-consecuencia por resolución

- Ejemplo de determinación de no consecuencia por resolución

- Enunciado: Comprobar, por resolución, que
$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x).$$

- Reducción 1: Comprobar que es consistente
$$\{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)], \neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))\}$$

- Reducción 2: Comprobar que es consistente
$$\{\{P(x), Q(x)\}, \{\neg P(a)\}, \{\neg Q(b)\}\}$$

- Resolución:

- | | | |
|---|------------------|---------------------|
| 1 | $\{P(x), Q(x)\}$ | Hipótesis |
| 2 | $\{\neg P(a)\}$ | Hipótesis |
| 3 | $\{\neg Q(b)\}$ | Hipótesis |
| 4 | $\{Q(a)\}$ | Resolvente de 1 y 2 |
| 5 | $\{P(b)\}$ | Resolvente de 1 y 3 |

- Modelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}.$

Tableros semánticos

- Fórmulas gamma y beta

- Las fórmulas gamma, junto con sus componentes, son

$(\forall x)F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg(\exists x)F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

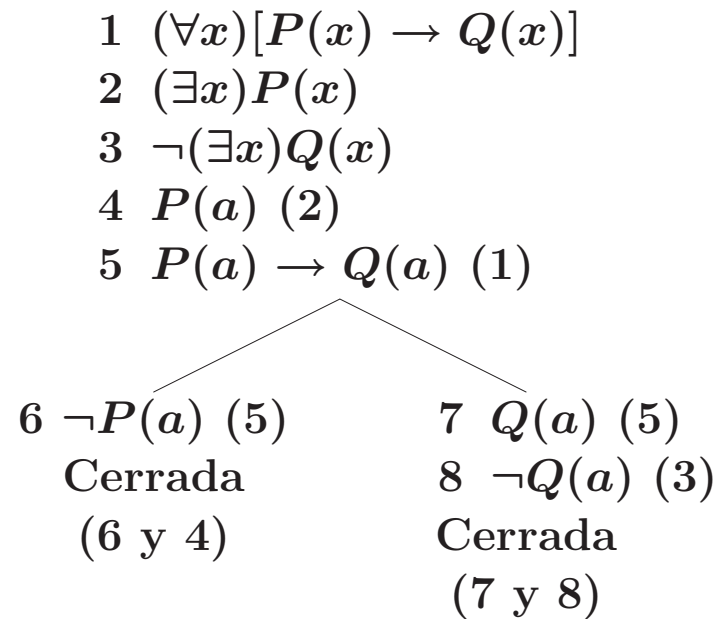
- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

$(\exists x)F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg(\forall x)F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

Tableros semánticos

- Ejemplo de consecuencia mediante tablero:

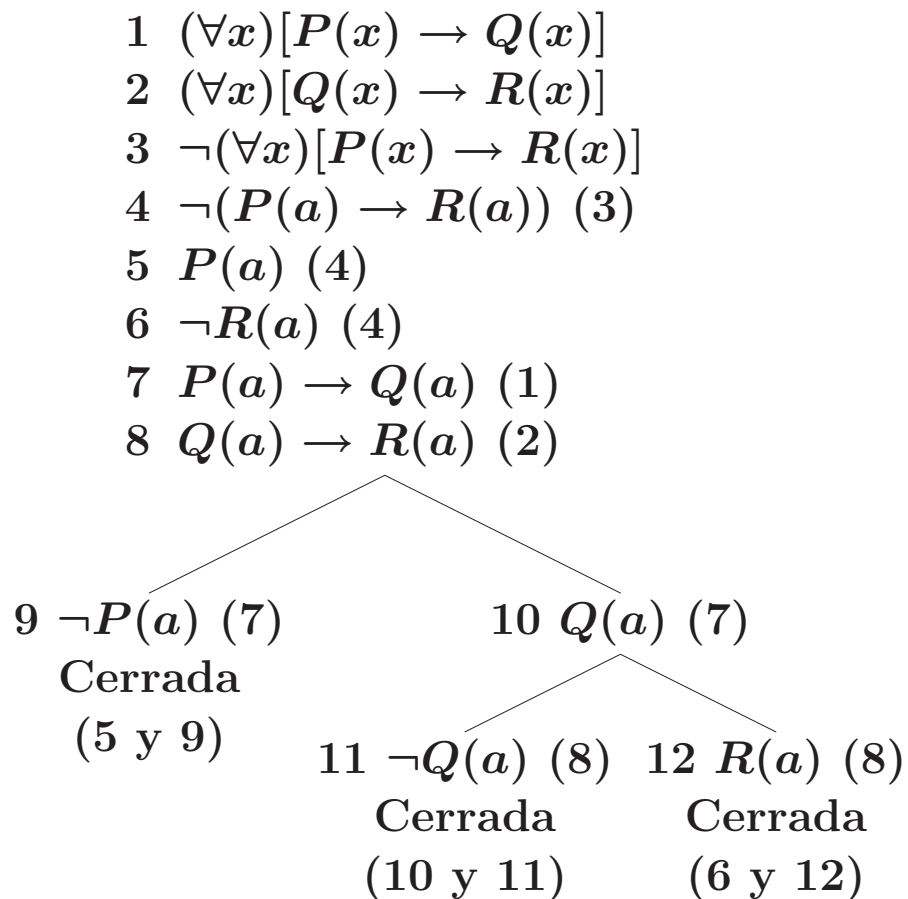
$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Tab} (\exists x)Q(x)$$



Tableros semánticos

- Ejemplo de consecuencia mediante tablero:

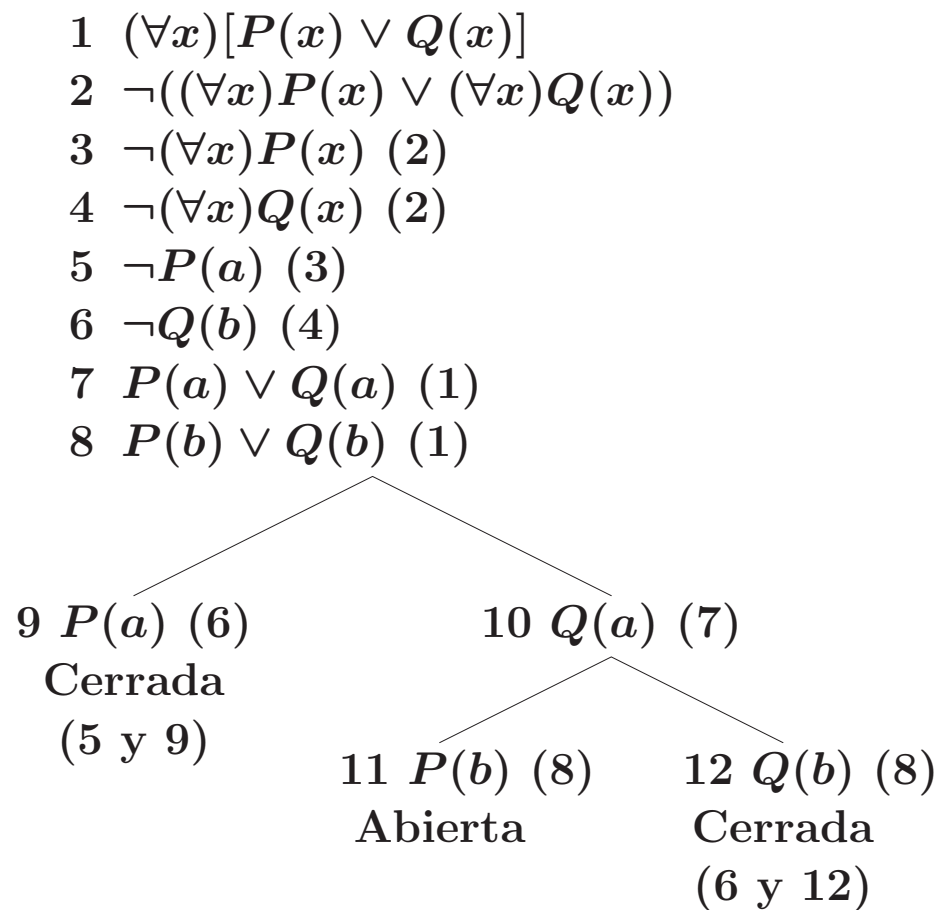
$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \vdash_{Tab} (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$$



Tableros semánticos

- Ejemplo de no consecuencia mediante tablero:

$$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x).$$



Contramodelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving* (2nd ed.) (Springer, 1996) pp. 137–141.
- M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 34–40.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 70–99.
- J.I. García, P.A. García y J.M. Urbano *Fundamentos lógicos de la programación*. (Universidad de Granada, 2002) pp. 45–66
- M. Genesereth *Computational Logic (Chapter 9: Relational Resolution)* (Stanford University, 2003)
- S. Hölldobler *Computational logic*. (U. de Dresden, 2004) pp. 71–74.
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 50–61.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkhäuser, 1989) pp. 79–96.