

Soluciones del examen de *Lógica informática*
(Grupo 1) del 7 de Abril de 2006

José A. Alonso Jiménez

Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

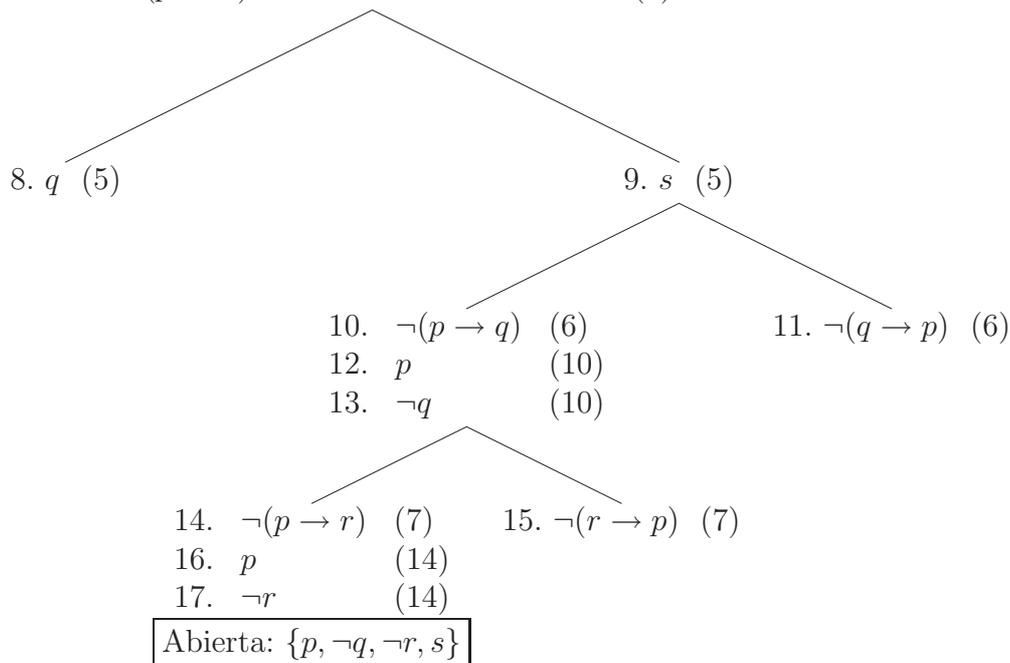
$$p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, construir un contramodelo a partir del tablero.

Solución:

Para decidir si $p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$ es una tautología, vamos a intentar construir un tablero completo cerrado de su negación.

1. $\neg(p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r))$
2. $p \wedge (q \vee s)$ (1)
3. $\neg((p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r))$ (1)
4. p (2)
5. $q \vee s$ (2)
6. $\neg(p \leftrightarrow q)$ (3)
7. $\neg(p \leftrightarrow r)$ (3)



Al tener una rama completa abierta, la fórmula original no es una tautología y un contramodelo de ella es la interpretación v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, $v(r) = 0$ y $v(s) = 1$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si*

$$\{C \rightarrow A, G \rightarrow D, \neg(B \wedge C \wedge G \rightarrow E)\} \models A \wedge B \wedge D.$$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$\begin{aligned} C \rightarrow A &\equiv \neg C \vee A \\ &\equiv \{\{\neg C, A\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G \rightarrow D &\equiv \neg G \vee D \\ &\equiv \{\{\neg G, D\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(B \wedge C \wedge G \rightarrow E) &\equiv \neg(\neg(B \wedge C \wedge G) \vee E) \\ &\equiv \neg\neg(B \wedge C \wedge G) \wedge \neg E \\ &\equiv B \wedge C \wedge G \wedge \neg E \\ &\equiv \{\{B\}, \{C\}, \{G\}, \{\neg E\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B \wedge D) &\equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg D \\ &\equiv \{\{\neg A, \neg B, \neg D\}\} \end{aligned}$$

Una refutación por resolución del conjunto de las cláusulas obtenidas es

1. $\{\neg C, A\}$
2. $\{\neg G, D\}$
3. $\{B\}$
4. $\{C\}$
5. $\{G\}$
6. $\{\neg E\}$
7. $\{\neg A, \neg B, \neg D\}$
8. $\{A\}$ Resolvente de 1 y 4
9. $\{D\}$ Resolvente de 2 y 5
10. $\{\neg B, \neg D\}$ Resolvente de 7 y 8
11. $\{\neg D\}$ Resolvente de 3 y 10
12. \square Resolvente de 9 y 11

Por tanto, el conjunto de cláusulas es inconsistente y se verifica la relación de consecuencia.

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Juan está matriculado en tres asignaturas, Álgebra, Lógica y Dibujo. Juan comenta que*

Me gusta al menos una de las tres asignaturas. Si me gustase el Álgebra pero no el Dibujo, me gustaría la Lógica. O me gusta el Dibujo y la Lógica, o bien ninguna de las dos. Si me gustase el Dibujo, entonces me gustaría el Álgebra.

Los comentarios de Juan pueden formalizarse por

$$\{A \vee D \vee L, (A \wedge \neg D) \rightarrow L, (D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L), D \rightarrow A\}$$

Decidir, mediante resolución, si los comentarios de Juan son consistentes y, en su caso, calcular sus modelos a partir de la resolución. ¿Qué asignaturas le gustan a Juan?

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de los comentarios.

$$A \vee D \vee L \equiv \{\{A, D, L\}\}$$

$$\begin{aligned} (A \wedge \neg D) \rightarrow L &\equiv \neg(A \wedge \neg D) \vee L \\ &\equiv (\neg A \vee \neg\neg D) \vee L \\ &\equiv (\neg A \vee D) \vee L \\ &\equiv \{\{\neg A, D, L\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L) &\equiv (D \vee (\neg D \wedge \neg L)) \wedge (L \vee (\neg D \wedge \neg L)) \\
&\equiv ((D \vee \neg D) \wedge (D \vee \neg L)) \wedge ((L \vee \neg D) \wedge (L \vee \neg L)) \\
&\equiv (D \vee \neg L) \wedge (L \vee \neg D) \\
&\equiv \{\{D, \neg L\}, \{L, \neg D\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D \rightarrow A &\equiv \neg D \vee A \\
&\equiv \{\{\neg D, A\}\}
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que el conjunto de cláusulas obtenidas no es refutable por resolución.

- * 1. $\{A, D, L\}$
- * 2. $\{\neg A, D, L\}$
- * 3. $\{D, \neg L\}$
- * 4. $\{L, \neg D\}$
- * 5. $\{\neg D, A\}$
- * 6. $\{D, L\}$ Resolvente de 1 y 2. Subsume a 1 y 2.
- 7. $\{L\}$ Resolvente de 6 y 3. Subsume a 6 y 3.
- 8. $\{D\}$ Resolvente de 7 y 4. Subsume a 4.
- 9. $\{A\}$ Resolvente de 8 y 5. Subsume a 5.

En este momento, las únicas cláusulas no subsumidas son la 7, 8 y 9 con las que no se pueden formar ninguna resolvente. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, los comentarios de Juan son consistentes, un modelo es la interpretación v tal que $v(A) = 1$, $v(D) = 1$ y $v(L) = 1$ y a Juan le gustan las tres asignaturas.

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \models F$ y $S \models \neg F$.*
2. *Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.*

Solución:

Solución del apartado 1: La proposición es cierta. Sean $S = \{p \wedge \neg p\}$ y F la fórmula p . Entonces

- $S \models F$ (ya que $\{p \wedge \neg p\} \models p$) y
- $S \models \neg F$ (ya que $\{p \wedge \neg p\} \models \neg p$).

Solución del apartado 2: La proposición es cierta. Sean $S = \{p\}$ y F la fórmula q . Entonces

- $S \not\models F$ (ya que $\{p\} \not\models q$ puesto que la valoración v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$ es un contramodelo) y
- $S \not\models \neg F$ (ya que $\{p\} \not\models \neg q$ puesto que la valoración v_2 tal que $v_2(p) = 1$ y $v_2(q) = 1$ es un contramodelo).