Soluciones del examen de *Lógica informática* (Grupos 1 y 2) del 5 de Septiembre de 2006

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 5 de Septiembre de 2006

Ejercicio 1 [2 puntos] *Sea F la fórmula*

$$((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \rightarrow \neg((q \land r) \rightarrow \neg p)) \land (r \rightarrow \neg(q \lor p)))$$

Decidir, mediante tablero semántico, si F es satisfacible. En el caso de que lo sea, calcular un modelo v de F a partir del tablero y comprobar que v es modelo de F.

Solución:

La fórmula F es satisfacible si el tablero semántico de F tiene una rama abierta. En la figura 1 se muestra una rama abierta del tablero semántico de F. Por tanto, F es safisfacible.

1. $((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \rightarrow \neg((q \land r) \rightarrow \neg p)) \land (r \rightarrow \neg(q \lor p)))$

2. $(p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)$ (1)

3. $((\neg p \lor q) \rightarrow \neg((q \land r) \rightarrow \neg p)) \land (r \rightarrow \neg(q \lor p))$ (1)
4, $(\neg p \lor q) \rightarrow \neg((q \land r) \rightarrow \neg p)$ (3)
5. $r \rightarrow \neg(q \lor p)$ (3)

6. $\neg(\neg p \lor q)$ (4)
8. $\neg\neg p$ (6)
9. $\neg q$ (6)
10. p (8)

7. $\neg((q \land r) \rightarrow \neg p)$ (4)

11. $\neg r$ (5)
Abierta
$\{p, \neg q, \neg r\}$

12. $\neg(q \lor p)$ (5)

Figura 1: Rama abierta del tablero semántico

La interpretación v tal que $v(p) = 1$, $v(q) = 0$ y $v(r) = 1$ es un modelo de F. Efectivamente,

$$v(((p \lor q) \leftrightarrow \neg(p \lor q)) \lor (((\neg p \lor q) \rightarrow \neg((q \land r) \rightarrow \neg p)) \land (r \rightarrow \neg(q \lor p))))$$

1 0 0 1
0 0 1
0 0
1 1
1
1

Ejercicio 2 [2 puntos] *Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es consistente*

$$
\begin{array}{rl}
S = \{ & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[\neg B(y) \to C(x,y)]], \\
& (\exists x)A(x), \\
& \neg(\forall y)(\exists z)C(z,y), \\
& (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \to A(z)) \to (\neg C(y,z) \to \neg B(y))] \ \}
\end{array}
$$

Si S es consistente, obtener razonadamente un modelo de S.

Solución:

Vamos a decidir la consistencia de S usando resolución, Para ello, comenzamos calculando una forma clausal de S.

$$
\begin{array}{rl}
& (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[\neg B(y) \to C(x,y)]] \\
\equiv & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[\neg\neg B(y) \lor C(x,y)]] \\
\equiv & (\forall x)[A(x) \land (\exists y)[B(y) \lor C(x,y)]] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[A(x) \land (B(y) \lor C(x,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[A(x) \land (B(f(x)) \lor C(x,f(x)))] \\
\equiv & \{\{A(x)\},\{B(f(x)),C(x,f(x))\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& (\exists x)A(x) \\
\equiv_{sat} & A(a) \\
\equiv & \{\{A(a)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& \neg(\forall y)(\exists z)C(z,y) \\
\equiv & (\exists y)(\forall z)\neg C(z,y) \\
\equiv_{sat} & (\forall z)\neg C(z,b) \\
\equiv_{sat} & \{\{\neg C(z,b)\}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
& (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \to A(z)) \to (\neg C(y,z) \to \neg B(y))] \\
\equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(\neg B(x) \lor A(z)) \to (\neg\neg C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(\neg B(x) \lor A(z)) \to (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[\neg(\neg B(x) \lor A(z)) \lor (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(\neg\neg B(x) \land \neg A(z)) \lor (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \land \neg A(z)) \lor (C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv & (\forall y)(\exists x)(\forall z)[(B(x) \lor C(y,z) \lor \neg B(y)) \land (\neg A(z) \lor C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)(\forall z)[(B(g(y)) \lor C(y,z) \lor \neg B(y)) \land (\neg A(z) \lor C(y,z) \lor \neg B(y))] \\
\equiv & \{\{B(g(y)),C(y,z),\neg B(y)\},\{\neg A(z),C(y,z),\neg B(y)\}\}
\end{array}
$$

La forma de clausal de S es el conjunto cuyas cláusulas son

$$\begin{array}{ll} C_1 & = \{A(x)\} \\ C_2 & = \{B(f(x)), C(x, f(x))\} \\ C_3 & = \{A(a)\} \\ C_4 & = \{\neg C(z, b)\} \\ C_5 & = \{B(g(y)), C(y, z), \neg B(y)\} \\ C_6 & = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\} \end{array}$$

Para decidir la consistencia de S puede ignorarse la cláusula $C_3 = \{A(a)\}$, ya que está subsumida por la $C_1 = \{A(x)\}$. Vamos a calcular la saturación de S por resolución.

En el primer paso, elegimos la cláusula $C_1 = \{A(x)\}$ que no genera ninguna resolvente con las cláusulas elegidas.

En el segundo paso, elegimos la cláusula $C_4 = \{\neg C(z, b)\}$ que no genera ninguna resolvente con las cláusulas elegidas.

En el tercer paso, elegimos la cláusula $C_2 = \{B(f(x)), C(x, f(x))\}$ que no genera ninguna resolvente con las cláusulas elegidas.

En el cuarto paso, elegimos la cláusula $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ que genera las siguientes resolventes:

- la resolvente de $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ y $C_1 = \{A(x)\}$ con unificador $\{x/z\}$ es
$$C_7 = \{C(y, z), \neg B(y)\}$$
- la resolvente de $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ y $C_4 = \{\neg C(z, b)\}$ aplicándole a C_6 la sustitución $\{z/x\}$ y unificando con $\{z/y, x/b\}$ es $\{\neg A(b), \neg B(y)\}$ que al simplificarse con C_1 se transforma en
$$C_8 = \{\neg B(y)\}$$
- la resolvente de $C_6 = \{\neg A(z), C(y, z), \neg B(y)\}$ y $C_2 = \{B(f(x)), C(x, f(x))\}$ con unificador $\{y/f(x)\}$ es $\{\neg A(z), C(f(x), z), C(x, f(x))\}$ que al simplificarse con C_1 se transforma en
$$C_9 = \{C(f(x), z), C(x, f(x))\}$$

La cláusula C_8 subsume a las cláusulas C_7, C_6 y C_5.

En el quinto paso, elegimos la cláusula $C_8 = \{\neg B(y)\}$ que genera con $C_2 = \{B(f(x)), C(x, f(x))\}$ y unificador $\{y/f(x)$ la resolvente
$$C_{10} = \{C(x, f(x))\}$$
que subsume las cláusulas C_2 y C_9.

En el sexto paso, elegimos la cláusula $C_{10} = \{C(x, f(x))\}$ que no genera ninguna resolvente.

Se ha terminado la saturación sin encontrar la cláusula vacía. Por tanto, S es consistente.

Para obtener un modelo nos fijamos en las cláusulas que quedan después de la saturación: $C_1 = \{A(x)\}$, $C_4 = \{\neg C(z, b)\}$, $C_8 = \{\neg B(y)\}$ y $C_{10} = \{C(x, f(x))\}$. El universo de Herbrand es $U = \{b, f(b), f(f(b)), \dots\}$. Sea $\mathcal{I}$ la interpretación de Herbrand tal que $A^I = U$, $B^I = \emptyset$ y $C^I = \{(x, f(x)) : x \in U\}$. Fácilmente se comprueba que $\mathcal{I}$ es un modelo de las cláusulas anteriores y del conjunto S.

Un modelo finito es $\mathcal{I}' = (U', I')$ con $U' = \{0, 1\}$, $b^{I'} = 1$, $f^{I'} = \{(0, 0), (1, 0)\}$, $A^{I'} = \{0, 1\}$, $B^{I'} = \emptyset$ y $C^{I'} = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Ejercicio 3 [2 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para toda fórmula F, toda subfórmula G de F y toda variable libre x de G, se tiene que x es una variable libre de F.*

2. *Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene $(\exists x)[F \wedge G] \equiv (\exists x)F \wedge (\exists x)G$.*

3. *Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene $(\exists x)[F \wedge G] \equiv (\exists x)F \wedge (\exists x)G$.*

Solución:

Apartado 1 Es falso como se observa tomando como F la fórmula $(\forall x)P(x)$ y como G la fórmula $P(x)$. Entonces, G es una subfórmula de F y x es una variable libre de G que no es una variable libre de F.

Apartado 2 Es falso como se observa tomando como F la fórmula $P(x)$ y como G la fórmula $Q(x)$. Entonces $(\exists x)[F \wedge G] \not\equiv (\exists x)F \wedge (\exists x)G$ ya que hay interpretaciones en las que se verifica $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ y no se verifica $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$. Por ejemplo, $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{0, 1\}$, $P^I = \{0\}$ y $Q^I = \{1\}$.

Apartado 2 Es falso como se observa tomando como F y G la misma fórmula. Otro contraejemplo consiste en tomar como F ó G una fórmula en la que no ocurra la variable x.

Ejercicio 4 [2 puntos] *Decidir, por resolución, si la fórmula*

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$$

es consecuencia lógica de la fórmula

$$(\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)].$$

Solución:

Lo decidiremos por resolución. Para ello calculamos las formas clausales de la hipótesis y de la negación de ls conclusión.

$$\begin{array}{ll}
 & (\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[(P(x,y) \rightarrow P(x,x)) \wedge (P(x,x) \rightarrow P(x,y)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[(\neg P(x,y) \vee P(x,x)) \wedge (\neg P(x,x) \vee P(x,y)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[(\neg P(x,a) \vee P(x,x)) \wedge (\neg P(x,x) \vee P(x,a)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x,a), P(x,x)\}, \{\neg P(x,x), P(x,a)\}\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)] \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)[(P(z,y) \rightarrow \neg P(z,x)) \wedge (\neg P(z,x) \rightarrow P(z,y))] \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)(\forall z)[(\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \wedge (\neg\neg P(z,x) \vee P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg((\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \wedge (P(z,x) \vee P(z,y)))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[\neg(\neg P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \vee \neg(P(z,x) \vee P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(\neg\neg P(z,y) \wedge \neg\neg P(z,x)) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \wedge P(z,x)) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y))) \wedge (P(z,x) \vee (\neg P(z,x) \wedge \neg P(z,y)))] \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \vee \neg P(z,x)) \wedge (P(z,y) \vee \neg P(z,y)) \wedge \\
 & \qquad (P(z,x) \vee \neg P(z,x)) \wedge (P(z,x) \vee \neg P(z,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)(\exists z)[(P(z,y) \vee \neg P(z,b)) \wedge (P(z,y) \vee \neg P(z,y)) \wedge \\
 & \qquad (P(z,b) \vee \neg P(z,b)) \wedge (P(z,b) \vee \neg P(z,y))] \\
\equiv_{sat} & (\forall y)[(P(f(y),y) \vee \neg P(f(y),b)) \wedge (P(f(y),y) \vee \neg P(f(y),y)) \wedge \\
 & \qquad (P(f(y),b) \vee \neg P(f(y),b)) \wedge (P(f(y),b) \vee \neg P(f(y),y))] \\
\equiv & \{\{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}, \{P(f(y),y), \neg P(f(y),y)\}, \\
 & \ \{P(f(y),b), \neg P(f(y),b)\}, \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}\}
\end{array}$$

La conclusión es consecuencia de la hipótesis syss el conjunto S formado por las cláusulas obtenidas es inconsistente. Las cláusulas obtenidas son

$$\begin{array}{ll}
C_1 & = \{\neg P(x,a), P(x,x)\} \\
C_2 & = \{\neg P(x,x), P(x,a)\} \\
C_3 & = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\} \\
C_4 & = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),y)\} \\
C_5 & = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),b)\} \\
C_6 & = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}
\end{array}$$

Para decidir la consistencia de S pueden ignorarse las cláusulas C_4 y C_5 porque son tautológicas. Vamos a calcular la saturación de S por resolución.

En el primer paso, elegimos la cláusula $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ que no genera ninguna resolvente no–tautológica con las cláusulas elegidas.

En el segundo paso, elegimos la cláusula $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ que no genera ninguna resolvente no–tautológica con las cláusulas elegidas.

En el tercer paso, elegimos la cláusula $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$. La única resolvente no–tautológica de C_3 con las cláusulas elegidas es

$C_7 = \{\neg P(f(a),b), P(f(a),f(a))\}$

resolvente de C_3 con $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ usando el unificador $\{y/a, x/f(a)\}$.

En el cuarto paso, elegimos la cláusula $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$. La única resolvente no–tautológica de C_6 con las cláusulas elegidas es

$C_8 = \{P(f(a),b), \neg P(f(a),f(a))\}$

resolvente de C_6 con $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ usando el unificador $\{y/a, x/f(a)\}$.

En el quinto paso, elegimos la cláusula $C_7 = \{\neg P(f(a),b), P(f(a),f(a))\}$. Las resolventes no–tautológicas de C_7 con las cláusulas elegidas son

- $\{P(f(a),f(a)), \neg P(f(a),a)\}$ resolvente de C_7 y $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$ con unificador $\{y/a\}$. La resolvente está subsumida en $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ y se elimina.
- $\{\neg P(f(a),b), P(f(a),a)\}$ resolvente de C_7 y $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ con unificador $\{x/f(a)\}$. La resolvente está subsumida en $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$ y se elimina.

En el sexto paso, elegimos la cláusula $C_8 = \{P(f(a),b), \neg P(f(a),f(a))\}$. Las resolventes no–tautológicas de C_7 con las cláusulas elegidas son

- $\{\neg P(f(a),f(a)), P(f(a),a)\}$ resolvente de C_8 y $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$ con unificador $\{y/a\}$. La resolvente está subsumida en $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$ y se elimina.
- $\{P(f(a),b), \neg P(f(a),a)\}$ resolvente de C_8 y $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$ con unificador $\{x/f(a)\}$. La resolvente está subsumida en $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$ y se elimina.

Se ha terminado la saturación sin encontrar la cláusula vacía. Por tanto, S es consistente y se verifica que $(\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)] \not\models (\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$

Para obtener un contramodelo nos fijamos en las cláusulas que quedan después de la saturación: $C_1 = \{\neg P(x,a), P(x,x)\}$, $C_2 = \{\neg P(x,x), P(x,a)\}$, $C_3 = \{P(f(y),y), \neg P(f(y),b)\}$, $C_6 = \{P(f(y),b), \neg P(f(y),y)\}$, $C_7 = \{\neg P(f(a),b), P(f(a),f(a))\}$ y $C_8 = \{P(f(a),b), \neg P(f(a),f(a))\}$. Un modelo de las cláusulas anteriores es $\mathcal{I} = (U,I)$ con $U = \{0\}$, $a^I = 0$, $b^I = 0$, $f^I = \{(0,0)\}$ y $P^I = \emptyset$. Se tiene que

$\mathcal{I} \models (\exists y)(\forall x)[P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)]$

$\mathcal{I} \not\models (\forall x)(\exists y)(\forall z)[P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$

Ejercicio 5 [2 puntos] *Probar mediante deducción natural:*

1. $(p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow s) \models (p \land q) \rightarrow (r \lor s)$
2. $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))],\ (\exists x)[P(x) \lor \neg R(x)]\} \models (\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$

Solución:
Apartado 1: $(p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow s) \models (p \land q) \rightarrow (r \lor s)$
La solución se muestra en la figura 2 (página 8).

1	$(p \rightarrow r) \lor (q \rightarrow s)$	Premisa
2	$p \land q$	Supuesto
3	$p \rightarrow r$	Supuesto
4	p	$\land\mathcal{E}2$
5	r	$\rightarrow\mathcal{E}3,4$
6	$r \lor s$	$\lor\mathcal{I}5$
7	$q \rightarrow s$	Supuesto
8	q	$\land\mathcal{E}2$
9	s	$\rightarrow\mathcal{E}3,4$
10	$r \lor s$	$\lor\mathcal{I}5$
11	$r \lor s$	$\lor\mathcal{E}1, 3-6, 7-10$
12	$(p \land q) \rightarrow (r \lor s)$	$\rightarrow\mathcal{I}2-11$

Figura 2: Apartado 1

Apartado 2: $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))],\ (\exists x)[P(x) \lor \neg R(x)]\} \models (\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$
La solución se muestra en la figura 3 (página 9).

1	$(\forall x)[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))]$	Premisa
2	$(\exists x)[P(x) \vee \neg R(x)]$	Premisa
3	actual $i, P(i) \vee \neg R(i)$	Supuesto
4	$P(i)$	Supuesto
5	$P(i) \rightarrow (R(i) \rightarrow S(i))$	$\forall\mathcal{E}1$
6	$R(i) \rightarrow S(i)$	$\rightarrow\mathcal{E}5, 4$
7	$\neg R(i)$	Supuesto
8	$R(i)$	Supuesto
9	$\perp$	$\neg\mathcal{E}7, 8$
10	$S(i)$	$\perp\mathcal{E}9$
11	$R(i) \rightarrow S(i)$	$\rightarrow\mathcal{I}8-10$
12	$R(i) \rightarrow S(i)$	$\vee\mathcal{E}3, 4-6, 7-11$
13	$(\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$	$\exists\mathcal{I}12$
14	$(\exists x)[R(x) \rightarrow S(x)]$	$\exists\mathcal{E}2, 3-13$

Figura 3: Apartado 2