

Lógica informática (2005–06)

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Sustituciones

- Def.: Una **sustitución** σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Térm}(L)$.
- Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
- Ejemplo: $[x/s(0), y/x + y]$ la sustitución σ de Var en los términos de la aritmética definida por $\sigma(x) = s(0)$, $\sigma(y) = x + y$ y $\sigma(z) = z$ para $z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$
- Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

1

2

Aplicación de sustituciones a términos

- Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i .
- Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \rightarrow \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Ejemplo: Si $\sigma = [x/f(y, a), y/z]$, entonces
 - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
 - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y .
 - $h(a, x, w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y, a), w)$
 - $f(x, y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y, a), z)$
 - $h(a, f(x, y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x, y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y, a), z), w)$

3

Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i .
- Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \rightarrow \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

4

Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
 - $((\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x, y)))\sigma = (\forall x)((Q(x) \rightarrow R(x, y))\sigma_x)$
 $= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \rightarrow R(x, y)\sigma_x)$
 $= (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x, b))$
 - $(Q(x) \rightarrow (\forall x)R(x, y))\sigma = Q(x)\sigma \rightarrow ((\forall x)R(x, y))\sigma$
 $= Q(f(y)) \rightarrow (\forall x)(R(x, y)\sigma_x)$
 $= Q(f(y)) \rightarrow (\forall x)R(x, b)$
 - $((\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x, y)))\sigma = (\forall x)((Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x, y))\sigma_x)$
 $= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \rightarrow ((\forall y)R(x, y))\sigma_x)$
 $= (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)(R(x, y)\sigma_{xy}))$
 $= (\forall x)(Q(x) \rightarrow (\forall y)R(x, y))$

5

Sustituciones libres

- Def.: Una **sustitución se denomina libre para una fórmula** cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- Ejemplos:
 - $[y/x]$ no es libre para $(\exists x)(x < y)$
 $(\exists x)(x < y)[y/x] = (\exists x)(x < x)$
 - $[y/g(y)]$ es libre para $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(y)] = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(g(y))))$
 - $[y/g(x)]$ no es libre para $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(x)] = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(g(x))))$
- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F .

6

Regla de eliminación del cuantificador universal

- Regla de **eliminación del cuantificador universal**:

$$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]} \forall e$$

donde $[x/t]$ es libre para F .

- Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
- Ejemplo: $P(c), (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$

1	$P(c)$	premisa
2	$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	premisa
3	$P(c) \rightarrow Q(c)$	$\forall e$ 2
4	$Q(c)$	$\rightarrow e$ 3, 1
- Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \not\vdash (\exists y)(y < y)$.

7

Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\begin{array}{|l} x_0 \\ \vdots \\ F[x/x_0] \end{array}}{(\forall x)F} \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\wedge i$.
- Ejemplo: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x)$

1	$(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	premisa
2	$(\forall x)P(x)$	premisa
3	actual x_0	supuesto
4	$P(x_0) \rightarrow \neg Q(x_0)$	$\forall e$ 1, 3
5	$P(x_0)$	$\forall e$ 2, 3
6	$Q(x_0)$	$\rightarrow e$ 4, 5
7	$(\forall x)Q(x)$	$\forall i$ 3 – 6

8

Regla de introducción del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial:

$$\frac{F[x/t]}{(\exists x)F} \exists i$$

donde $[x/t]$ es libre para F .

- Nota: Analogía con $\forall i_1$ y $\forall i_2$.
- Ejemplo 3: $(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)P(x)$

- 1 $(\forall x)P(x)$ premisa
- 2 $P(x_0)$ $\forall e$ 1
- 3 $(\exists x)P(x)$ $\exists i$ 2

9

Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{(\exists x)F \quad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G} \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\forall e$.
- Ejemplo: $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$

- 1 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ premisa
- 2 $(\exists x)P(x)$ premisa
- 3 actual $x_0, P(x_0)$ supuesto
- 4 $P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$ $\forall e$ 1, 3
- 5 $Q(x_0)$ $\rightarrow e$ 4, 3
- 6 $(\exists x)Q(x)$ $\exists i$ 5
- 7 $(\exists x)Q(x)$ $\exists e$ 2, 3 – 6

10

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.
 - [1(a)] $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$
 - [1(b)] $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$
- Sean F y G fórmulas y x una variable no libre en G .
 - [2(a)] $(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$
 - [2(b)] $(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$
 - [2(c)] $(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$
 - [2(d)] $(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$
- Sean F y G fórmulas.
 - [3(a)] $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$
 - [3(b)] $(\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$
- Sean F y G fórmulas.
 - [4(a)] $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$
 - [4(b)] $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

11

Equivalencia 1(a) \rightarrow

$$\neg(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$$

1	$\neg(\forall x)P(x)$	premise
2	$\neg(\exists x)\neg P(x)$	supuesto
3	actual x_0	supuesto
4	$\neg P(x_0)$	supuesto
5	$(\exists x)\neg P(x)$	$\exists i$ 4, 3
6	\perp	$\neg e$ 2, 5
7	$P(x_0)$	RAA 4 – 6
8	$(\forall x)P(x)$	$\forall i$ 3 – 7
9	\perp	$\neg e$ 1, 8
10	$(\exists x)\neg P(x)$	RAA 2 – 9

12

Equivalencia 1(a) ←

$$(\exists x)\neg P(x) \vdash \neg(\forall x)P(x)$$

1	$(\exists x)\neg P(x)$	premisa
2	$\neg\neg(\forall x)P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, \neg P(x_0)$	supuesto
4	$(\forall x)P(x)$	$\neg\neg$ e 2
5	$P(x_0)$	\forall e 4
6	\perp	\neg e 3,5
7	\perp	\exists e 1,3-6
8	$\neg(\forall x)P(x)$	RAA 2-7

Equivalencia 3(a) →

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

1	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	\forall e 1,2
4	$P(x_0)$	\wedge e 3
5	$(\forall x)P(x)$	\forall i 2-4
6	actual x_1	supuesto
7	$P(x_1) \wedge Q(x_1)$	\forall e 1,6
8	$Q(x_1)$	\wedge e 7
9	$(\forall x)Q(x)$	\forall i 6-8
10	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	\wedge i 5,9

13

15

Equivalencia 1(a) ↔

$$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x)$$

1	$\neg(\forall x)P(x)$	supuesto
2	$(\exists x)\neg P(x)$	Lema 1(a) →
3	$\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$	→i 1-2
4	$(\exists x)\neg P(x)$	supuesto
5	$\neg(\forall x)P(x)$	Lema 1(a) ←
6	$(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$	→i 4-5
7	$\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$	↔i 3,6

Equivalencia 3(a) ←

$$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \vdash (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

1	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$(\forall x)P(x)$	\wedge e 1
4	$P(x_0)$	\forall e 3,2
5	$(\forall x)Q(x)$	\wedge e 1
6	$Q(x_0)$	\wedge e 5
7	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	\wedge i 4,6
8	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	\forall i 2-7

14

16

Equivalencia 3(a) ↔

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

1	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	supuesto
2	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	Lema 3(a) →
3	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	→i 1 – 2
4	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	supuesto
5	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	Lema 3(a) ←
6	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	→i 4 – 5
7	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	↔i 3, 6

Equivalencia 3(b) ←

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

1	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	premisa
2	actual $x_0, P(x_0) \vee Q(x_0)$	supuesto
3	$P(x_0)$	supuesto
4	$(\exists x)P(x)$	∃i 3, 2
5	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	∨i 4
6	$Q(x_0)$	supuesto
7	$(\exists x)Q(x)$	∃i 6, 2
8	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	∨i 7
9	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	∨e 2, 3 – 5, 6 – 8
10	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	∃e 1, 2 – 9

17

19

Equivalencia 3(b) →

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \vdash (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

1	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	premisa
2	$(\exists x)P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	∨i 3
5	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	∃i 4, 3
6	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	∃e 2, 3 – 5
7	$(\exists x)Q(x)$	supuesto
8	actual $x_1, Q(x_1)$	supuesto
9	$P(x_1) \vee Q(x_1)$	∨i 8
10	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	∃i 9, 8
11	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	∃e 7, 8 – 10
12	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	∨e, 2 – 6, 7 – 11

Equivalencia 3(b) ↔

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

1	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	supuesto
2	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	Lema 3(b) →
3	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	→i 1 – 2
4	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	supuesto
5	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	Lema 3(b) ←
6	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	→i 4 – 5
7	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	↔i 3, 6

18

20

Equivalencia 4(b) \rightarrow

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \vdash (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

1	$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	premisa
2	actual $x_0, (\exists y)P(x_0,y)$	supuesto
3	actual $y_0, P(x_0,y_0)$	supuesto
4	$(\exists x)P(x,y_0)$	$\exists i$ 3.2, 2.1
5	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\exists i$ 4, 3.1
6	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\exists e$ 2.2, 3 – 5
7	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\exists e$ 1, 2 – 6

21

Equivalencia 4(b) \leftrightarrow

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

1	$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	supuesto
2	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	Lema 4(b) \rightarrow
3	$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\rightarrow i$ 1 – 2
4	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	supuesto
5	$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	Lema 4(b) \rightarrow
6	$(\exists y)(\exists x)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$	$\rightarrow i$ 4 – 5
7	$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\leftrightarrow i$ 3, 6

22

Regla de eliminación de la igualdad

- Regla de **eliminación de la igualdad**:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F .

- Ejemplo:

- $(x+1) = (1+x)$ premisa
- $(x+1 > 1) \rightarrow (x+1 > 0)$ premisa
- $(1+x > 1) \rightarrow (1+x > 0) =e$ 1, 2

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

- $t_1 = t_2$ premisa
- $t_2 = t_3$ premisa
- $t_1 = t_3 =e$ 2, 1

23

Regla de introducción de la igualdad

- Regla de **introducción de la igualdad**:

$$\frac{\text{—}}{t = t} = i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

- $t_1 = t_2$ premisa
- $t_1 = t_1 =i$
- $t_2 = t_1 =e$ 1, 2

24

Tableros semánticos: Fórmulas gamma y delta

- Las fórmulas gamma, junto con sus componentes, son

$(\forall x)F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg(\exists x)F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

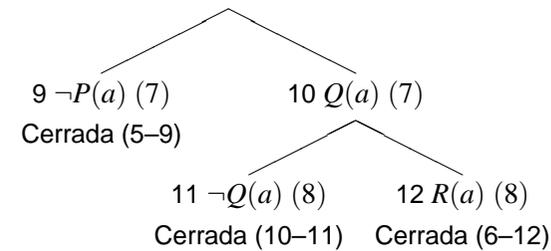
- Las fórmulas delta, junto con sus componentes, son

$(\exists x)F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg(\forall x)F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \vdash_{Tab} (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$

- 1 $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$
- 2 $(\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]$
- 3 $\neg(\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$
- 4 $\neg(P(a) \rightarrow R(a))$ (3)
- 5 $P(a)$ (4)
- 6 $\neg R(a)$ (4)
- 7 $P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)
- 8 $Q(a) \rightarrow R(a)$ (2)

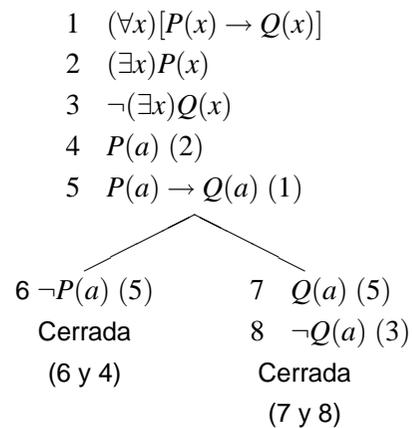


25

27

Ejemplo de consecuencia mediante tablero semánticos

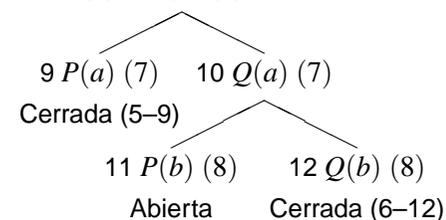
$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Tab} (\exists x)Q(x)$



Ejemplo de no consecuencia mediante tablero

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

- 1 $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$
- 2 $\neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$
- 3 $\neg(\forall x)P(x)$ (2)
- 4 $\neg(\forall x)Q(x)$ (2)
- 5 $\neg P(a)$ (3)
- 6 $\neg Q(b)$ (4)
- 7 $P(a) \vee Q(a)$ (1)
- 8 $P(b) \vee Q(b)$ (1)



Contramodelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

26

28

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review*. (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 88–94.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.