Lógica informática (2005–06)

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Sustituciones

- Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación σ : Var $\longrightarrow$ Térm(L).
- Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por
$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
- Ejemplo: $[x/s(0), y/x+y]$ la sustitución σ de Var en los términos de la aritmética definida por
$$\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x+y \text{ y } \sigma(z) = z \text{ para } z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$$
- Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

Aplicación de sustituciones a términos

- Def.: $t[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación σ : Térm$(L) \to$ Térm(L) definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma,\dots,t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1,\dots,t_n) \end{cases}$$

- Ejemplo: Si $\sigma = [x/f(y,a), y/z]$, entonces
  - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
  - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y.
  - $h(a,x,w)\sigma = h(a\sigma,x\sigma,w\sigma) = h(a,f(y,a),w)$
  - $f(x,y)\sigma = f(x\sigma,y\sigma) = f(f(y,a),z)$
  - $h(a,f(x,y),w)\sigma = h(a\sigma,f(x,y)\sigma,w\sigma) = h(a,f(f(y,a),z),w)$

Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Def.: $F[x_1/t_1,\dots,x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación σ : Fórm$(L) \to$ Fórm(L) definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma,\dots,t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1,\dots,t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall,\exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
  - $$\begin{aligned} ((\forall x)(Q(x) \to R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \to R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \to R(x,y)\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to R(x,b)) \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} (Q(x) \to (\forall x)R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \to ((\forall x)R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \to (\forall x)(R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \to (\forall x)R(x,b) \end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned} ((\forall x)(Q(x) \to (\forall y)R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \to (\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \to ((\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to (\forall y)(R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to (\forall y)R(x,y)) \end{aligned}$$

Sustituciones libres

- Def.: Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- Ejemplos:
  - $[y/x]$ no es libre para $(\exists x)(x < y)$
    $(\exists x)(x < y)[y/x] = (\exists x)(x < x)$
  - $[y/g(y)]$ es libre para $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(y)] = (\forall x)(P(x) \to Q(x, f(g(y))))$
  - $[y/g(x)]$ no es libre para $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $(\forall x)(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(x)] = (\forall x)(P(x) \to Q(x, f(g(x))))$
- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F.

Regla de eliminación del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal:

  $$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]}\ \forall e$$

  donde $[x/t]$ es libre para F.
- Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
- Ejemplo: $P(c), (\forall x)(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$

1	$P(c)$	premisa
2	$(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
3	$P(c) \to Q(c)$	$\forall$e 2
4	$Q(c)$	$\to$e 3, 1

- Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \not\vdash (\exists y)(y < y)$.

Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad F[x/x_0] \end{array}}}{(\forall x)F}\ \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\wedge$i.
- Ejemplo: $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\forall x)P(x) \vdash (\forall x)Q(x)$

1	$(\forall x)(P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
2	$(\forall x)P(x)$	premisa
3	actual x_0	supuesto
4	$P(x_0) \to \neg Q(x_0)$	$\forall$e $1,3$
5	$P(x_0)$	$\forall$e $2,3$
6	$Q(x_0)$	$\to$e $4,5$
7	$(\forall x)Q(x)$	$\forall$i $3-6$

Regla de introducción del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial:

$$\frac{F[x/t]}{(\exists x)F} \exists i$$

donde $[x/t]$ es libre para F.

- Nota: Analogía con $\vee$i$_1$ y $\vee$i$_2$.
- Ejemplo 3: $(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)P(x)$

1	$(\forall x)P(x)$	premisa
2	$P(x_0)$	$\forall$e 1
3	$(\exists x)P(x)$	$\exists$i 2

Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{(\exists x)F \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \vdots \\ & G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\vee$e.
- Ejemplo: $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$

1	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	premisa
2	$(\exists x)P(x)$	premisa
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall$e $1,3$
5	$Q(x_0)$	$\to$e $4,3$
6	$(\exists x)Q(x)$	$\exists$i 5
7	$(\exists x)Q(x)$	$\exists$e $2, 3-6$

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.
  - [1(a)] $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$
  - [1(b)] $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$
- Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.
  - [2(a)] $(\forall x)F \land G \equiv (\forall x)(F \land G)$
  - [2(b)] $(\forall x)F \lor G \equiv (\forall x)(F \lor G)$
  - [2(c)] $(\exists x)F \land G \equiv (\exists x)(F \land G)$
  - [2(d)] $(\exists x)F \lor G \equiv (\exists x)(F \lor G)$
- Sean F y G fórmulas.
  - [3(a)] $(\forall x)F \land (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \land G)$
  - [3(b)] $(\exists x)F \lor (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \lor G)$
- Sean F y G fórmulas.
  - [4(a)] $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$
  - [4(b)] $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

Equivalencia 1(a) $\longrightarrow$

$\neg(\forall x)P(x) \vdash (\exists x)\neg P(x)$

1	$\neg(\forall x)P(x)$	premisa
2	$\neg(\exists x)\neg P(x)$	supuesto
3	actual x_0	supuesto
4	$\neg P(x_0)$	supuesto
5	$(\exists x)\neg P(x)$	$\exists$i $4,3$
6	$\bot$	$\neg$e $2,5$
7	$P(x_0)$	RAA $4-6$
8	$(\forall x)P(x)$	$\forall$i $3-7$
9	$\bot$	$\neg$e $1,8$
10	$(\exists x)\neg P(x)$	RAA $2-9$

Equivalencia 1(a) $\leftarrow$

$(\exists x)\neg P(x) \vdash \neg(\forall x)P(x)$

1	$(\exists x)\neg P(x)$	premisa
2	$\neg\neg(\forall x)P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, \neg P(x_0)$	supuesto
4	$(\forall x)P(x)$	$\neg\neg$e 2
5	$P(x_0)$	$\forall$e 4
6	$\perp$	$\neg$e $3,5$
7	$\perp$	$\exists$e $1,3-6$
8	$\neg(\forall x)P(x)$	RAA $2-7$

Equivalencia 1(a) $\leftrightarrow$

$\neg(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)\neg P(x)$

1	$\neg(\forall x)P(x)$	supuesto
2	$(\exists x)\neg P(x)$	Lema 1(a) $\longrightarrow$
3	$\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$(\exists x)\neg P(x)$	supuesto
5	$\neg(\forall x)P(x)$	Lema 1(a) $\longleftarrow$
6	$(\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\neg(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Equivalencia 3(a) $\longrightarrow$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

1	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\forall$e $1,2$
4	$P(x_0)$	$\wedge$e 3
5	$(\forall x)P(x)$	$\forall$i $2-4$
6	actual x_1	supuesto
7	$P(x_1) \wedge Q(x_1)$	$\forall$e $1,6$
8	$Q(x_1)$	$\wedge$e 7
9	$(\forall x)Q(x)$	$\forall$i $6-8$
10	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	$\wedge$i $5,9$

Equivalencia 3(a) $\leftarrow$

$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x) \vdash (\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$

1	$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$(\forall x)P(x)$	$\wedge$e 1
4	$P(x_0)$	$\forall$e 3, 2
5	$(\forall x)Q(x)$	$\wedge$e 1
6	$Q(x_0)$	$\wedge$e 5
7	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	$\wedge$i 4, 6
8	$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$	$\forall$i $2-7$

Equivalencia 3(a) $\leftrightarrow$

$$(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$$

1	$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$	supuesto
2	$(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$	Lema 3(a) $\longrightarrow$
3	$(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \longrightarrow (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$	$\longrightarrow$i $1-2$
4	$(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$	supuesto
5	$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$	Lema 3(a) $\longleftarrow$
6	$(\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x) \longrightarrow (\forall x)(P(x) \land Q(x))$	$\longrightarrow$i $4-5$
7	$(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

Equivalencia 3(b) $\longrightarrow$

$$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \vdash (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$$

1	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	premisa
2	$(\exists x)P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$\vee$i 3
5	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$i $4, 3$
6	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$e $2, 3-5$
7	$(\exists x)Q(x)$	supuesto
8	actual $x_1, Q(x_1)$	supuesto
9	$P(x_1) \vee Q(x_1)$	$\vee$i 8
10	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$i $9, 8$
11	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$e $7, 8-10$
12	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	$\vee$1e $, 2-6, 7-11$

Equivalencia 3(b) $\leftarrow$

$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

1	$(\exists x)(P(x) \vee Q(x))$	premisa
2	actual $x_0,\ P(x_0) \vee Q(x_0)$	supuesto
3	$P(x_0)$	supuesto
4	$(\exists x)P(x)$	$\exists$i $3, 2$
5	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	$\vee$i 4
6	$Q(x_0)$	supuesto
7	$(\exists x)Q(x)$	$\exists$i $6, 2$
8	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	$\vee$i 7
9	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	$\vee$e $2, 3-5, 6-8$
10	$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$	$\exists$e $1, 2-9$

Equivalencia 3(b) $\leftrightarrow$

$$(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \lor Q(x))$$

1	$(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)$	supuesto
2	$(\exists x)(P(x) \lor Q(x))$	Lema 3(b) $\longrightarrow$
3	$(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) \longrightarrow (\exists x)(P(x) \lor Q(x))$	$\longrightarrow$i $1-2$
4	$(\exists x)(P(x) \lor Q(x))$	supuesto
5	$(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)$	Lema 3(b) $\longleftarrow$
6	$(\exists x)(P(x) \lor Q(x)) \longrightarrow (\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x)$	$\longrightarrow$i $4-5$
7	$(\exists x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \lor Q(x))$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Equivalencia 4(b) $\longrightarrow$

$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \vdash (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

1	$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	premisa
2	actual x_0, $(\exists y)P(x_0,y)$	supuesto
3	actual y_0, $P(x_0,y_0)$	supuesto
4	$(\exists x)P(x,y_0)$	$\exists$i $3.2, 2.1$
5	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\exists$i $4, 3.1$
6	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\exists$e $2.2, 3-5$
7	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\exists$e $1, 2-6$

Equivalencia 4(b) $\leftrightarrow$

$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

1	$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	supuesto
2	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	Lema 4(b) $\longrightarrow$
3	$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \longrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\longrightarrow$i $1-2$
4	$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$	supuesto
5	$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$	Lema 4(b) $\longrightarrow$
6	$(\exists y)(\exists x)P(x,y) \longrightarrow (\exists x)(\exists y)P(x,y)$	$\longrightarrow$i $4-5$
7	$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Regla de eliminación de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

  donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- Ejemplo:

1	$(x+1) = (1+x)$	premisa
2	$(x+1>1) \rightarrow (x+1>0)$	premisa
3	$(1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$	=e $1,2$

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	=e $2,1$

Regla de introducción de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:

$$\frac{}{t = t} = i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	$=$i
3	$t_2 = t_1$	$=$e $1, 2$

Tableros semánticos: Fórmulas gamma y delta

- Las fórmulas gamma, junto con sus componentes, son

$(\forall x)F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg(\exists x)F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

- Las fórmulas delta, junto con sus componentes, son

$(\exists x)F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg(\forall x)F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

Ejemplo de consecuencia mediante tablero semánticos

$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Tab} (\exists x)Q(x)$$

1 $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

2 $(\exists x)P(x)$

3 $\neg(\exists x)Q(x)$

4 $P(a)$ (2)

5 $P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)

6 $\neg P(a)$ (5)	7 $Q(a)$ (5)
Cerrada	8 $\neg Q(a)$ (3)
(6 y 4)	Cerrada
	(7 y 8)

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$$\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \vdash_{Tab} (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$$

1 $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$

2 $(\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]$

3 $\neg(\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$

4 $\neg(P(a) \rightarrow R(a))$ (3)

5 $P(a)$ (4)

6 $\neg R(a)$ (4)

7 $P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)

8 $Q(a) \rightarrow R(a)$ (2)

9 $\neg P(a)$ (7)
Cerrada (5–9)

10 $Q(a)$ (7)

11 $\neg Q(a)$ (8)
Cerrada (10–11)

12 $R(a)$ (8)
Cerrada (6–12)

Ejemplo de no consecuencia mediante tablero

$(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \not\models (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

1 $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

2 $\neg((\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$

3 $\neg(\forall x)P(x)$ (2)

4 $\neg(\forall x)Q(x)$ (2)

5 $\neg P(a)$ (3)

6 $\neg Q(b)$ (4)

7 $P(a) \vee Q(a)$ (1)

8 $P(b) \vee Q(b)$ (1)

9 $P(a)$ (7) — 10 $Q(a)$ (7)

Cerrada (5–9)

11 $P(b)$ (8) — 12 $Q(b)$ (8)

Abierta — Cerrada (6–12)

Contramodelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.