
Ejercicio 1 [4 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:*

1. *F es satisfacible si y sólo si toda consecuencia lógica de F es satisfacible.*
2. *Todo conjunto de fórmulas inconsistente tiene al menos un subconjunto consistente.*
3. *Sea $\mathscr{T}$ un tablero de S_1, I un modelo de una hoja abierta de $\mathscr{T}$ y $S_2 \subseteq S_1$. Entonces, $I \models S_2$.*

Solución:

Apartado 1: La proposición es verdadera. Veamos una prueba:

1. Si F es satisfacible, entonces toda consecuencia lógica de F es satisfacible.

   Si F es satisfacible, entonces tiene algún modelo. Sea I un modelo de F ($I \models F$). Tenemos que probar que para toda G tal que $\{F\} \models G$, G es satisfacible.

   Sea G tal que $\{F\} \models G$. Por definición de consecuencia lógica, todo modelo de F es también modelo de G. Por tanto, $I \models G$, de donde se deduce que G es satisfacible.

2. Si toda consecuencia lógica de F es satisfacible, entonces F es satisfacible.

   Basta tener en cuenta que $\{F\} \models F$.

Apartado 2: Si consideramos sólo conjuntos no vacíos, la proposición es falsa. Como ejemplo, podemos considerar el conjunto $S = \{p \wedge \neg p\}$ que es inconsistente y no tiene ningún subconjunto no vacío consistente. Ahora bien, si consideramos el conjunto vacío, la propusición es cierta, puesto que $\emptyset$ es un conjunto consistente de fórmulas, que es subconjunto de cualquier conjunto de fórmulas inconsistente.

Apartado 3: La proposición es verdadera. En efecto, si $\mathscr{T}$ es un tablero de S_1, e I es un modelo de una hoja abierta de $\mathscr{T}$, entonces $I \models S_1$. Como $S_2 \subseteq S_1$, se tiene también que $I \models S_2$.

Ejercicio 2 [3 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$$F : (p \wedge q \to r \vee \neg s) \to (\neg r \wedge q \to \neg p)$$

es tautología. Si no lo es, calcular a partir del tablero, un modelo de $\neg F$, una forma normal conjuntiva de F y una forma clausal de F.

Solución:

Un tablero para la fórmula $\neg F$ es

1.	$\neg((p \wedge q \to r \vee \neg s) \to (\neg r \wedge q \to \neg p))$	
2.	$p \wedge q \to r \vee \neg s$	(1)
3.	$\neg(\neg r \wedge q \to \neg p)$	(1)
4.	$\neg r \wedge q$	(3)
5.	p	(3)
6.	$\neg r$	(4)
7.	q	(4)

8. $\neg(p \wedge q)$ (2) 9. $r \vee \neg s$ (2)

10. $\neg p$ (8)	11. $\neg q$ (8)	12. r (9)	13. $\neg s$ (9)
Cerrada	Cerrada	Cerrada	Abierta
(10 y 5)	(11 y 7)	(12 y 6)	$\{p, \neg r, q, \neg s\}$

Como el tablero tiene una rama abierta, la fórmula $\neg F$ no es insatisfacible y, por tanto, la fórmula F no es tautología. Un modelo de $\neg F$ es la interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$ e $I(r) = I(s) = 0$.

Por otra parte, de las ramas abiertas del tablero obtenemos una forma normal disyuntiva de $\neg F$, $FND(\neg F) = p \wedge \neg r \wedge q \wedge \neg s$. Por tanto, una forma normal conjuntiva de F será la fórmula $\neg p \vee r \vee \neg q \vee s$. De aquí, una forma clausal de F es $\{\{\neg p, r, \neg q, s\}\}$.

Ejercicio 3 [3 puntos] *Usando resolución proposicional, comprobar la consistencia del siguiente conjunto de fórmulas:* $\{p \leftrightarrow \neg q, q \rightarrow p, r \rightarrow q, q \rightarrow r \wedge p, \neg(q \rightarrow r) \vee p\}$

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de cada fórmula del conjunto:

$$\begin{aligned} p \equiv \neg q &\equiv (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg q \vee p) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p) \\ &\equiv \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q \rightarrow p &\equiv \neg q \vee p \\ &\equiv \{\{\neg q, p\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \rightarrow q &\equiv \neg r \vee q \\ &\equiv \{\{\neg r, q\}\} \end{aligned}$$

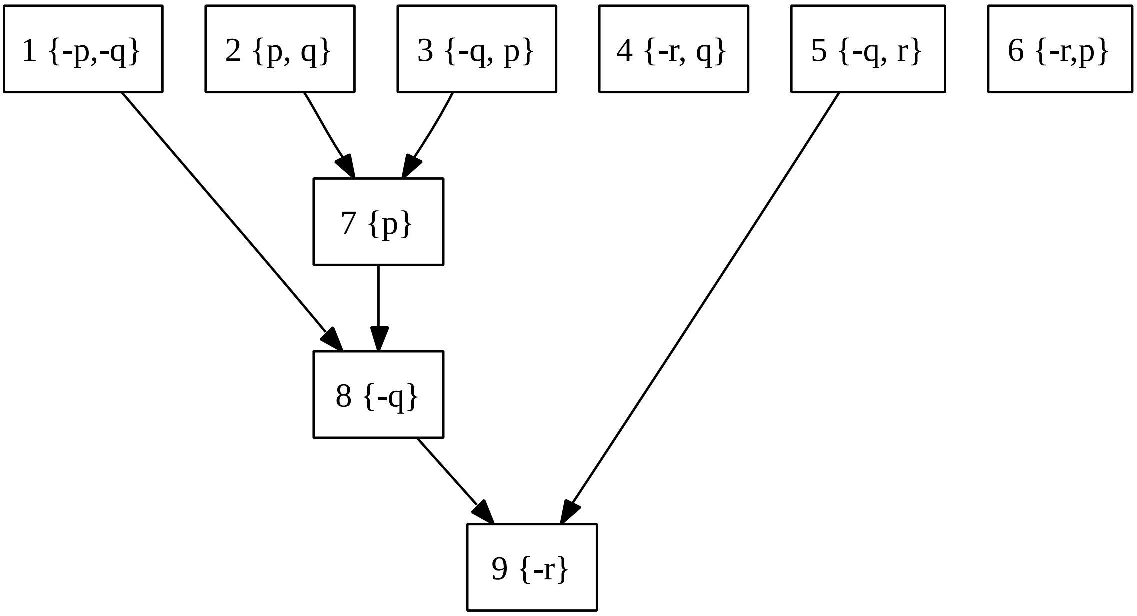
$$\begin{aligned} q \rightarrow r \wedge p &\equiv \neg q \vee (r \wedge p) \\ &\equiv (\neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee p)) \\ &\equiv \{\{\neg q, r\}, \{\neg q, p\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(q \rightarrow r) \vee p &\equiv \neg(\neg q \vee r) \vee p \\ &\equiv (q \wedge \neg r) \vee p \\ &\equiv (q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) \\ &\equiv \{\{q, p\}, \{\neg r, p\}\} \end{aligned}$$

Aplicando resolución proposicional al conjunto de cláusulas

$$\{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg q, p\}, \{\neg r, q\}, \{\neg q, r\}, \{\neg r, p\}\}$$

se obtiene el siguiente grafo:



Obsérvese que el grafo es saturado y que las cláusulas no subsumidas son $\{p\}, \{\neg q\}$ y $\{\neg r\}$. Por tanto, el conjunto de fórmulas es consistente. Un modelo del mismo es una interpretación I tal que $I(p) = 1$ e $I(q) = I(r) = 0$.