
Ejercicio 1 [3 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si los siguientes conjuntos son consistentes. En el caso de que lo sea, calcular a partir del tablero un modelo del conjunto y comprobar que lo es.*

1. $S_1 = \{p \to (r \to \neg p),\ \neg(p \to \neg q)\}$
2. $S_2 = \{p \to (q \to \neg p),\ \neg(p \to \neg q)\}$

Solución:

Apartado 1: Un tablero de $S_1 = \{p \to (r \to \neg p),\ \neg(p \to \neg q)\}$ es

$$
\begin{array}{lll}
1. & p \to (r \to \neg p) & \\
2. & \neg(p \to \neg q) & \\
3. & p & (1) \\
4. & \neg\neg q & (1) \\
5. & q & (4)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
6.\ \neg p\ \ (1) & & 7.\ r \to \neg p\ \ (1) \\
\text{Cerrada} & & \\
(6 \text{ y } 3) & 8.\ \neg r\ \ (7) & 9.\ \neg p\ \ (7) \\
& \text{Abierta} & \text{Cerrada} \\
& \{p, q, \neg r\} & (9 \text{ y } 3)
\end{array}
$$

Como el tablero tiene una rama abierta, el conjunto S_1 es consistente. Un modelo de S es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = 1$ e $I(r) = 0$.

Para comprobar que I es modelo de S_1 basta evaluar las fórmulas de S_1 en I:

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
\{ & p & \to & (& r & \to & \neg & p), & \neg & (& p & \to & \neg & q) & \} \\
 & 1 & \mathbf{1} & & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

Apartado 2: Un tablero de $S_2 = \{p \to (p \to \neg p),\ \neg(p \to \neg q)\}$ es

$$
\begin{array}{lll}
1. & p \to (q \to \neg p) & \\
2. & \neg(p \to \neg q) & \\
3. & p & (1) \\
4. & \neg\neg q & (1) \\
5. & q & (4)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
6.\ \neg p\ \ (1) & & 7.\ q \to \neg p\ \ (1) \\
\text{Cerrada} & & \\
(6 \text{ y } 3) & 8.\ \neg q\ \ (7) & 9.\ \neg p\ \ (7) \\
& \text{Cerrada} & \text{Cerrada} \\
& (8 \text{ y } 5) & (9 \text{ y } 3)
\end{array}
$$

Como el tablero es cerrado, el conjunto S_2 es inconsistente.

Ejercicio 2 [3 puntos] *Decidir, mediante resolución, si se verifican las siguientes relaciones*

1. $\{\neg p \lor q \to r,\ p \to q\} \models p \land r$.
2. $\{\neg p \lor q \to r,\ p \to q\} \models r$.

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Solución:

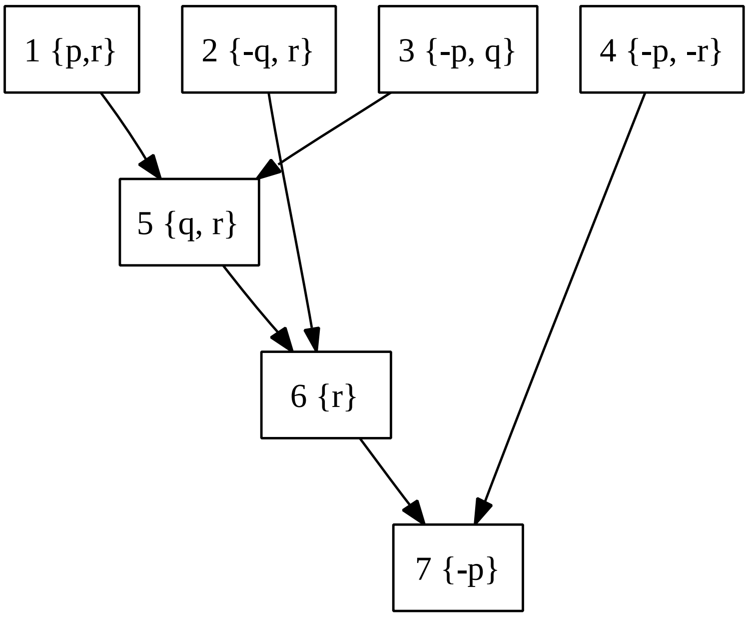
Apartado 1: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión.

$$\begin{aligned}
\neg p \lor q \to r &\equiv \neg(\neg p \lor q) \lor r \\
&\equiv (\neg\neg p \land \neg q) \lor r \\
&\equiv (p \land \neg q) \lor r \\
&\equiv (p \lor r) \land (\neg q \lor r) \\
&\equiv \{\{p, r\}, \{\neg q, r\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg p \to q &\equiv \neg p \lor q \\
&\equiv \{\{\neg p, q\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg(p \land r) &\equiv \neg p \lor \neg r \\
&\equiv \{\{\neg p, \neg r\}\}
\end{aligned}$$

Un grafo de resolución del conjunto de las cláusulas obtenidas es



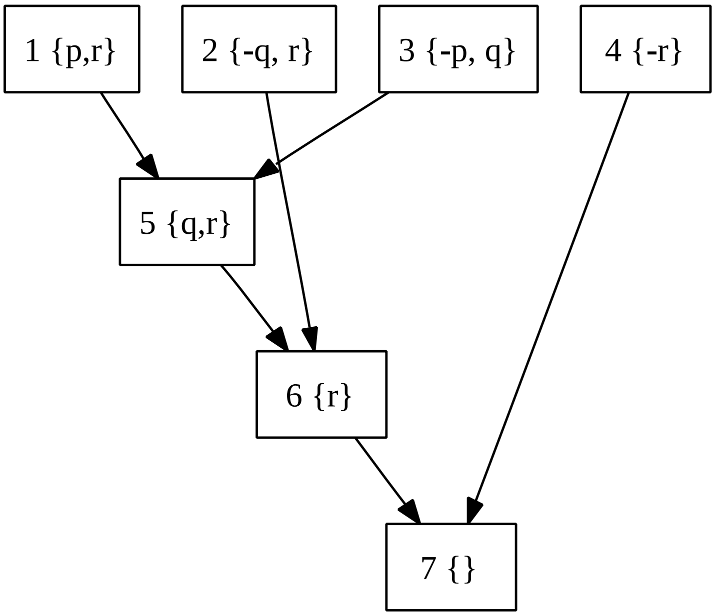
El grafo es saturado y las únicas cláusulas no subsumidas son la 6 y la 7 (ya que la 1, la 2 y la 5 están subsumidas por la 6 y la 4 lo está por la 7) . Por tanto, $\{\neg p \lor q \to r,\ p \to q\} \not\models p \land r$ y un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 0$ e $I(r) = 1$. En efecto,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\{ & \neg & p & \lor & q & \to & r, & p & \to & q\} & \models & p & \land & r \\
 & & 0 & & & \mathbf{1} & 1 & 0 & \mathbf{1} & & & 0 & \mathbf{0} & 1
\end{array}$$

Apartado 2: En primer lugar, calculamos las formas clausales de las hipótesis y de la negación de la conclusión. Las de las hipótesis son las mismas que en el apartado anterior. La de la negación de la conclusión es

$$\neg e \equiv \{\{\neg r\}\}$$

Un grafo de resolución del conjunto de las cláusulas obtenidas es



Puesto que se obtiene la cláusula vacía, $\{\neg p \vee q \rightarrow r,\ p \rightarrow q\} \models r$. Una demostración por resolución, obtenida a partir del grafo anterior, es

1.	$\{p, r\}$	
2.	$\{\neg q, r\}$	
3.	$\{\neg p, q\}$	
4.	$\{\neg r\}$	
5.	$\{q, r\}$	Resolvente de 1 y 3
6.	$\{r\}$	Resolvente de 5 y 2
7.	$\square$	Resolvente de 6 y 4

Ejercicio 3 [4 puntos] *Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Si un conjunto S de fórmulas es inconsistente, entonces existe una fórmula F en S tal que $\neg F$ también es un elemento de S.*

2. *Si un conjunto S de literales es inconsistente, entonces existe un literal L en S tal que $\neg L$ también es un elemento de S.*

3. *Si la cláusula C es una resolvente de las cláusulas C_1 y C_2, entonces C es consecuencia de C_1 y C_2.*

4. *Si la cláusula C es consecuencia de las cláusulas C_1 y C_2, entonces C es una resolvente de C_1 y C_2.*

Solución:

Apartado 1: La proposición es falsa ya que el conjunto $S = \{p \wedge \neg p\}$ es inconsistente y no existe una fórmula F en S tal que $\neg F$ también es un elemento de S.

Apartado 2: La proposición es verdadera ya que si S es un conjunto de literales y no existe un literal L en S tal que $\neg L$ también es un elemento de S, entonces la interpretación I definida por

$$I(p) = \begin{cases} 1. & \text{si } p \in S; \\ 0, & \text{si } \neg p \in S \end{cases}$$

es un modelo de S y, por tanto S es consistente.

Apartado 3: La proposición es verdadera. Para probarlo, supongamos que C es una resolvente de C_1 y C_2, Entonces existe un literal L tal que

$$L \in C_1 \tag{1}$$
$$L^c \in C_2 \tag{2}$$
$$C = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}) \tag{3}$$

Veamos que $\{C_1, C_2\} \models C$. Sea I un una interpretación tal que

$$I \models \{C_1, C_2\} \tag{4}$$

Tenemos que demostrar que I es modelo de C; es decir, que existe un $L' \in C$ tal que $I(L') = 1$. Distinguimos dos casos:

Caso 1: Supongamos que $I(L) = 0$. Por (4), $I \models C_1$. Luego, existe $L' \in C_1$ tal $I(L') = 1$. Por (1), $L' \neq L$. Por tanto $L' \in C_1 \setminus \{L\}$ y $L' \in C$.

Caso 2: Supongamos que $I(L) = 1$. Por (4), $I \models C_2$. Luego, existe $L' \in C_2$ tal $I(L') = 1$. Por (2), $L' \neq L^c$. Por tanto $L' \in C_2 \setminus \{L^c\}$ y $L' \in C$.

Apartado 4: La proposición es falsa. Por ejemplo, si $C_1 = \{p\}$, $C_2 = \{q\}$ y $C = \{p, q\}$, entonces C es consecuencia de las cláusulas C_1 y C_2 pero C no es una resolvente de C_1 y C_2.