Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Se considera la siguiente sentencia:* "Existe una persona tal que si dicha persona paga, entonces todas las personas pagan".

1. *Formalizar la sentencia usando el símbolos $P(x)$ para representar que x es una persona que paga.*
2. *Decidir, mediante tableros semánticos, la validez de la sentencia.*
3. *Decidir, mediante resolución, la validez de la sentencia.*

Solución:

Apartado 1: Una formalización de la sentencia es
$\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$.

Apartado 2: Para decidir la sentencia calculamos un tablero semántico de su negación

1	$\neg\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$	
2	$\neg(P(a) \to \forall y P(y))$	(1_a)
3	$P(a)$	(2)
4	$\neg\forall y P(y)$	(2)
5	$\neg P(b)$	(4)
6	$\neg(P(b) \to \forall y P(y))$	(1_b)
7	$P(b)$	(6)
8	$\neg\forall y P(y)$	(6)
	Cerrada (7 y 5)	

Como el tablero es cerrado, la sentencia es válida.

Apartado 2: Para decidir la sentencia calculamos una forma clausal de su negación

$$\begin{array}{ll}
 & \neg\exists x(P(x) \to \forall y P(y)) \\
\equiv & \forall x \neg(P(x) \to \forall y P(y)) \\
\equiv & \forall x(P(x) \land \neg\forall y P(y)) \\
\equiv & \forall x(P(x) \land \exists y \neg P(y)) \\
\equiv & \forall x \exists y(P(x) \land \neg P(y)) \\
\equiv_{sat} & \forall x(P(x) \land \neg P(f(x))) \\
\equiv & \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}
\end{array}$$

Se obtienen dos cláusulas $C_1 = \{P(x)\}$ y $C_2 = \{\neg P(f(x))\}$. Para resolverlas, le aplicamos a la C_1 el renombramiento $\theta = [x/x_1]$ obteniendo $C_1\theta = C_1 = \{P(x_1)\}$ y al resolver con C_2, utilizando el unificador $[x_1/f(x)]$ se obtiene la cláusula vacía. Por tanto, la sentencia es válida.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Se considera la siguiente argumentación:* "Hay estudiantes inteligentes y hay estudiantes trabajadores. Por tanto, hay estudiantes inteligentes y trabajadores".

1. *Formalizar la argumentación usando los siguientes símbolos:*
   - *$P(x)$ para representar que x es un estudiante inteligente y*
   - *$Q(x)$ para representar que x es un estudiante trabajador.*
2. *Decidir, mediante resolución, la validez de la argumentación mostrando una prueba o un contraejemplo de Herbrand obtenido a partir de la resolución.*

Solución:

Apartado 1: La formalización de la argumentación es

$\exists x P(x) \land \exists x Q(x) \models \exists x(P(x) \land Q(x))$.

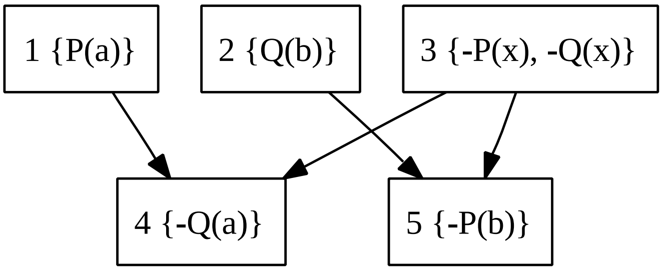
Apartado 2: En primer lugar calculamos una forma clausal de la premisa

$$
\begin{array}{ll}
 & \exists x P(x) \land \exists x Q(x) \\
\equiv & \exists x P(x) \land \exists y Q(y) \\
\equiv & \exists x \exists y (P(x) \land Q(y)) \\
\equiv_{sat} & \exists y (P(a) \land Q(y)) \\
\equiv_{sat} & (P(a) \land Q(b)) \\
\equiv & \{\{P(a)\},\{Q(b)\}\}
\end{array}
$$

En segundo lugar, calculamos una forma clausal de la negación de la conclusión

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg \exists x (P(x) \land Q(x)) \\
\equiv & \forall x \neg (P(x) \land Q(x)) \\
\equiv & \forall x (\neg P(x) \lor \neg Q(x)) \\
\equiv & \{\{\neg P(x), \neg Q(x)\}\}
\end{array}
$$

Finalmente calculamos las resolventes de las cláusula obtenidas



Al no obtenerse la cláusula vacía, la argumentación no es válida. Un contramodelo de Herbrand es la interpretación $\mathscr{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$, $I(P) = \{a\}$ e $I(Q) = \{b\}$.

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Se considera la siguiente argumentación:* "Todo lo existente tiene una causa. Luego hay una causa de todo lo existente".

1. *Formalizar la argumentación usando los siguientes símbolos:*
   - $E(x)$ *para representar que x es un ente existente y*
   - $C(x,y)$ *para representar que x es una causa de y.*
2. *Decidir la validez de la argumentación mostrando una prueba o un contraejemplo.*

Solución:

Apartado 1: Una formalización de la argumentación es

$\forall x (E(x) \to \exists y C(y,x)) \models \exists x \forall y (E(y) \to C(y,x))$.

Apartado 2: La argumentación no es válida. Un contraejemplo es la interpretación $\mathscr{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$, $I(E) = \{2\}$ e $I(C) = \{1, 2\}$. En efecto, la premisa es verdadera en $\mathscr{I}$ ya que

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\forall & x(& E(& x) & \to & \exists & y & C(& y, & x)) \\
V & 1 & F & 1 & V & & & & & \\
 & 2 & & & V & V & 2 & V & 1 & 2
\end{array}
$$

y la conclusión es falsa en $\mathscr{I}$ ya que

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\exists & x & \forall & y(& E(& y) & \to & C(& y, & x)) \\
F & 1 & F & 2 & V & 2 & F & F & 2 & 1 \\
 & 2 & F & 2 & V & 2 & F & F & 2 & 2
\end{array}
$$

Ejercicio 4 [2.5 puntos]

1. *¿Existe alguna fórmula F tal que todos los modelos de F tengan al menos dos elementos?*
2. *¿Existe alguna fórmula F tal que todos los modelos de F tengan dos elementos como máximo?*

3. *¿Existe alguna fórmula F tal que todos los modelos de F tengan exactamente dos elementos?*
4. *¿Existe alguna fórmula F tal que todos los modelos de F tengan exactamente tres elementos?*

Solución:

Apartado 1: Sí, la fórmula $\exists x \exists y (x \neq y)$

Apartado 2: Sí, la fórmula $\exists x \exists y \forall z (x = z \lor y = z)$.

Apartado 3: Sí, la fórmula $\exists x \exists y (x \neq y \land \forall z (x = z \lor y = z))$.

Apartado 4: Sí, la fórmula $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \land x \neq z \land y \neq z \land \forall u (x = u \lor y = u \lor z = u))$.