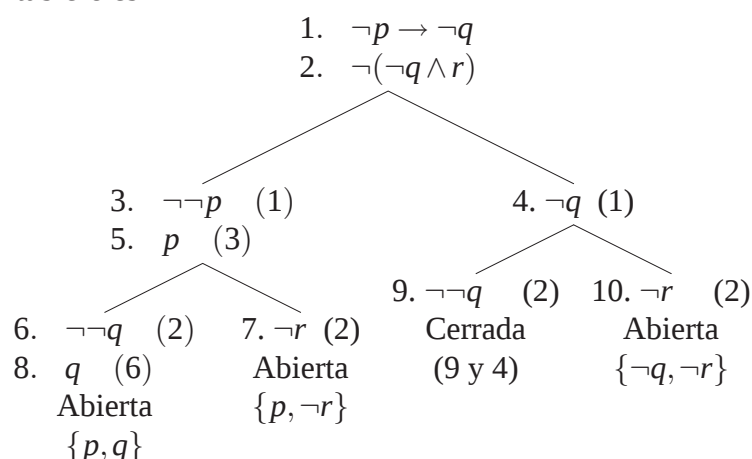


Ejercicio 1 [2 puntos] Sea F_1 la fórmula $\neg p \rightarrow \neg q$ y F_2 la fórmula $\neg(\neg q \wedge r)$. Se pide:

1. Decidir, mediante tableros semánticos, si $\{F_1, F_2\}$ es consistente.
2. A partir del apartado anterior, calcular una fórmula G que esté en forma normal disyuntiva y que sea equivalente a $(F_1 \wedge F_2)$.

Solución:

Apartado 1: El tablero es



Apartado 2: La fórmula G es $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$.

Ejercicio 2 [2 puntos] Se considera la siguiente argumentación:

1. Quien intente entrar en un país y no tenga pasaporte, encontrará algún aduanero que le impida el paso.
2. A algunas personas motorizadas que intentan entrar en un país le impiden el paso únicamente personas motorizadas.
3. Ninguna persona motorizada tiene pasaporte.
4. Por tanto, ciertos aduaneros están motorizados.

Las premisas pueden formalizarse por:

1. $\forall x(E(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge I(y, x)))$
2. $\exists x(M(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(I(y, x) \rightarrow M(y)))$
3. $\forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x))$

Decidir, mediante resolución, si el argumento es correcto (es decir, si la conclusión es consecuencia lógica de las premisas).

Solución:

La formalización de la conclusión es $\exists x(A(x) \wedge M(x))$.

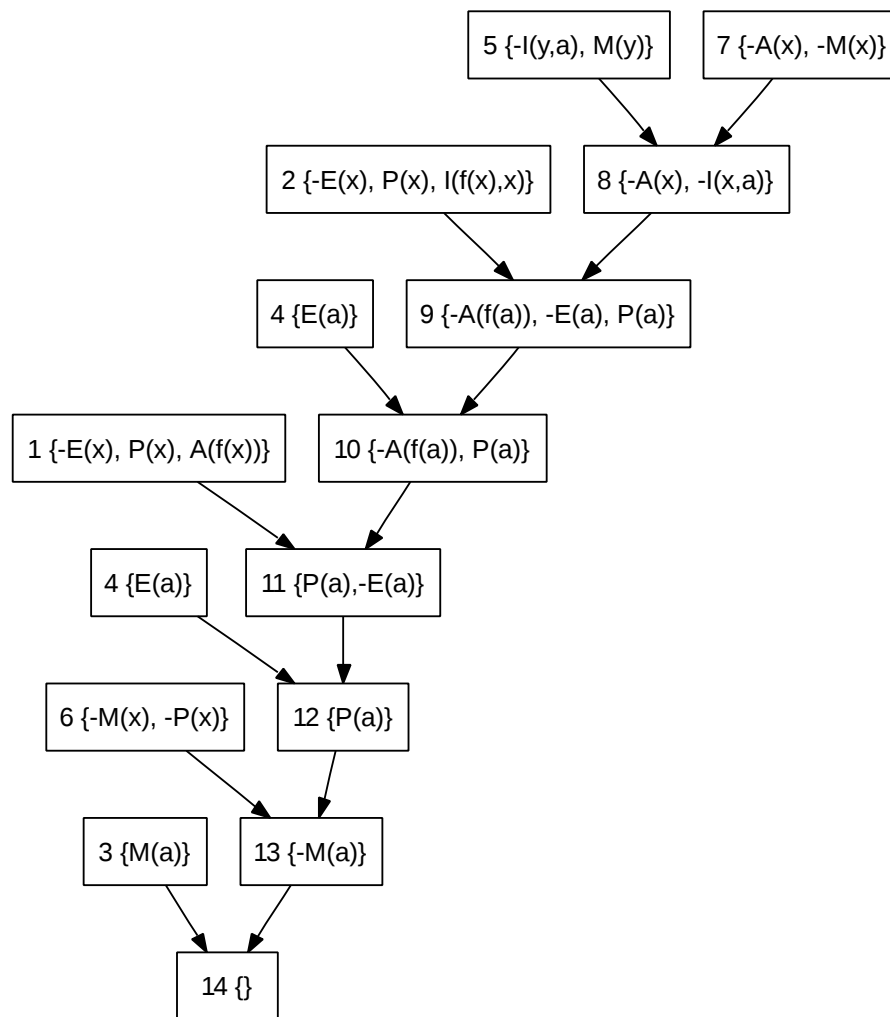
Para hacer la resolución, en primer lugar se calculan las formas clausales de las premisas y de la negación de la conclusión:

$$\begin{aligned}
& \forall x(E(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \forall x(\neg(E(x) \wedge \neg P(x)) \vee \exists y(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \forall x((\neg E(x) \vee \neg \neg P(x)) \vee \exists y(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \forall x((\neg E(x) \vee P(x)) \vee \exists y(A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \forall x \exists y((\neg E(x) \vee P(x)) \vee (A(y) \wedge I(y, x))) \\
\equiv & \forall x \exists y((\neg E(x) \vee P(x) \vee A(y)) \wedge (\neg E(x) \vee P(x) \vee I(y, x))) \\
\equiv_{sat} & \forall x((\neg E(x) \vee P(x) \vee A(f(x))) \wedge (\neg E(x) \vee P(x) \vee I(f(x), x))) \\
\equiv & \{\{\neg E(x), P(x), A(f(x))\}, \{\neg E(x), P(x), I(f(x), x)\}\} \\
& \exists x(M(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(I(y, x) \rightarrow M(y))) \\
\equiv & \exists x(M(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(\neg I(y, x) \vee M(y))) \\
\equiv & \exists x \forall y(M(x) \wedge E(x) \wedge (\neg I(y, x) \vee M(y))) \\
\equiv_{sat} & \forall y(M(a) \wedge E(a) \wedge (\neg I(y, a) \vee M(y))) \\
\equiv & \{\{M(a)\}, \{E(a)\}, \{\neg I(y, a), M(y)\}\} \\
& \forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \\
\equiv & \forall x(\neg M(x) \vee \neg P(x)) \\
\equiv & \{\{\neg M(x), \neg P(x)\}\} \\
& \neg \exists x(A(x) \wedge M(x)) \\
\equiv & \forall x \neg(A(x) \wedge M(x)) \\
\equiv & \forall x(\neg A(x) \vee \neg M(x)) \\
\equiv & \{\{\neg A(x), \neg M(x)\}\}
\end{aligned}$$

La demostración, por resolución lineal, es

1	$\{\neg E(x), P(x), A(f(x))\}$	Premisa 1a	
2	$\{\neg E(x), P(x), I(f(x), x)\}$	Premisa 1b	
3	$\{M(a)\}$	Premisa 2a	
4	$\{E(a)\}$	Premisa 2b	
5	$\{\neg I(y, a), M(y)\}$	Premisa 2c	
6	$\{\neg M(x), \neg P(x)\}$	Premisa 3	
7	$\{\neg A(x), \neg M(x)\}$	Conclusión	
8	$\{\neg A(x), \neg I(x, a)\}$	Resolvente de 7.2 y 5.2 con	$\sigma = [y/x]$
9	$\{\neg A(f(a)), \neg E(a), P(a)\}$	Resolvente de 8.2 y 2.3 con	$\theta_1 = [x/x_1],$ $\theta_2 = [x/x_2],$ $\sigma = [x_2/a, x_1/f(a)]$
10	$\{\neg A(f(a)), P(a)\}$	Resolvente de 9.2 y 4.1	
11	$\{P(a), \neg E(a)\}$	Resolvente de 10.2 y 1.3 con	$\sigma = [x/a]$
12	$\{P(a)\}$	Resolvente de 11.2 y 4.1	
13	$\{\neg M(a)\}$	Resolvente de 12.1 y 6.2 con	$\sigma = [x/a]$
14	$\square$	Resolvente de 13.1 y 3.1	

De manera gráfica



Por tanto, el argumento es correcto.

Ejercicio 3 [2 puntos] Formalizar las siguientes sentencias utilizando los símbolos indicados:

1. Los chinos tienen como máximo un hijo.
(Símbolos: $C(x)$ representa que x es chino y $H(x,y)$ representa que x es hijo de y).
2. Hay exactamente un participante.
(Símbolos: $P(x)$ representa que x es un participante).
3. Ningún socio del club está en deuda con el tesorero del club.
(Símbolos: $S(x)$ representa que x es socio del club, $D(x,y)$ representa que x está en deuda con y y a representa al tesorero del club).
4. No hay ningún pez que se coma a todos los peces.
(Símbolos: $P(x)$ representa que x es un pez y $C(x,y)$ representa que x se come a y).

Solución:

1. Los chinos tienen como máximo un hijo

$$\forall x(C(x) \rightarrow \forall y\forall z(H(y,x) \wedge H(z,x) \rightarrow y = z))$$

2. Hay exactamente un participante.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow x = y)).$$

3. Ningún socio del club está en deuda con el tesorero del club.

$$\neg \exists x(S(x) \wedge D(x, a)).$$

4. No hay ningún pez que se coma a todos los peces.

$$\neg \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow C(x, y))).$$

Ejercicio 4 [2 puntos] Sean S y T conjuntos de fórmulas. Demostrar o refutar las siguientes sentencias:

1. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cup T$ es consistente.
2. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cup T$ es inconsistente.
3. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cap T$ es consistente.
4. Si S es consistente y T es inconsistente, entonces $S \cap T$ es inconsistente.

Solución:

Apartado 1: Es falso, ya que en el apartado 2 se demuestra que $S \cup T$ es inconsistente.

Apartado 2: Es cierto, ya que si $S \cup T$ es consistente, entonces existe una interpretación I que es modelo de $S \cup T$. Entonces I también es modelo de T (ya que si F es una fórmula de T , entonces $F \in S \cup T$ y, por ser I modelo de $S \cup T$, $I(F) = 1$). Por tanto, T es consistente, que es una contradicción.

Apartado 3: Es cierto, ya que al ser S consistente existe un modelo I de S . Entonces I es modelo de $S \cap T$ (ya que si F es una fórmula de $S \cap T$, entonces $F \in S$ y, por ser I modelo de S , $I(F) = 1$). Por tanto, $S \cap T$ es consistente.

Apartado 4: Es falso, ya que en el apartado 3 se demuestra que $S \cap T$ es consistente.

Ejercicio 5 [2 puntos] Este ejercicio es sobre deducción natural. Cada alumno puede elegir entre usar Jape o no usarlo en su solución. Se realizará a las 12:00 en el aula de ordenadores AO1 (para los alumnos que deseen usar Jape) y, simultáneamente, en esta aula (para los alumnos que no deseen usar Jape).
