Ejercicio 1.1 **[T]** Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas proposicionales:

1. p
2. (p)
3. $(p \lor \neg q)$
4. $p \lor \neg q$
5. $\neg(p \lor p)$
6. $((p \to q) \lor (q \to p))$
7. $(p \lor \land q)$

Ejercicio 1.2 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. **[T]** $\mathsf{np}(F)$ que calcula el número de paréntesis de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{np}((p \to (\neg q \lor p))) = 4$.
2. **[T]** $\mathsf{Subf}(F)$ que calcula el conjunto de las subfórmulas de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{Subf}(p \to \neg q \lor p) = \{p \to \neg q \lor p, p, \neg q \lor p, \neg q, q\}$.
3. $\mathsf{npi}(F)$ que calcula el número de paréntesis izquierdos de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{npi}((p \to (\neg q \lor p))) = 2$.
4. $\mathsf{npd}(F)$ que calcula el número de paréntesis derechos de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{npd}((p \to (\neg q \lor p))) = 2$.

Ejercicio 1.3 Demostrar por inducción

1. **[T]** Todas las fórmulas proposicionales tienen un número par de paréntesis.
2. Todas las fórmulas proposicionales tienen el mismo número de paréntesis izquierdos que de paréntesis derechos.

Ejercicio 1.4 Para cada una de las siguientes fórmulas,

1. **[T]** $p \to \neg q \lor p$
2. $\neg q \land q \land p \to r$
3. $p \to q \to \neg r \lor s \lor p$

escribir la fórmula con paréntesis, construir el árbol de análisis y determinar todas sus subfórmulas.

Ejercicio 1.5 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{n\_variables}(F)$ que calcula el número variables proposicionales que ocurren en la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{n\_variables}(p \to p \lor q) = 3$.
2. $\mathsf{profundidad}(F)$ que calcula la profundidad del árbol de análisis de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{profundidad}(p \to p \lor q) = 2$.

Demostrar por inducción, que para toda fórmula F, $\mathsf{n\_variables}(F) \leq 2^{\mathsf{profundidad}(F)}$.

Ejercicio 1.6 **[T]** Calcular el valor de la fórmula $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$ en las siguientes interpretaciones

1. I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
2. I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

Ejercicio 1.7 **[T]** Demostrar que para toda fórmula F se tiene que para todo par de intepretaciones I_1, I_2, si $I_1(p) = I_2(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $I_1(F) = I_2(F)$.

Ejercicio 1.8 **[T]** Determinar cuáles de las siguientes interpretaciones es modelo de $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$

1. I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
2. I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

Ejercicio 1.9 **[T]** Determinar si las siguientes fórmulas son satisfacible o insatisfacible.

1. $(p \to q) \land (q \to r)$
2. $p \land \neg p$

Ejercicio 1.10 **[Examen 5–Mayo–2005]** ¿Es cierto que si $F \to G$ y F son satisfacibles, entonces G es satisfacible? Si es cierto, dar una explicación. Si no es cierto, dar un contraejemplo.

Ejercicio 1.11 **[T]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. F es tautología syss $\neg F$ es insatisfacible.
2. Si F es tautología, entonces F es satisfacible.
3. Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.

Ejercicio 1.12 En cada caso, determinar todos los modelos de la fórmula proposicional correspondiente:

1. **[T]** $(p \to q) \lor (q \to p)$
2. **[T]** $(p \to q) \land \neg(p \to q)$
3. **[T]** $p \to q$
4. **[T]** $p \lor \neg p$
5. **[T]** $p \land \neg p$
6. **[T]** $(p \to q) \lor (q \to p)$
7. **[T]** $(p \leftrightarrow q) \lor (q \leftrightarrow p)$
8. $p \to (q \to r \land q)$
9. $q \to (p \land \neg p) \to r$
10. $(p \leftrightarrow q) \land (p \to \neg q) \land p$
11. $(p \land r) \lor (\neg p \land q) \to \neg q$

Clasificar las fórmulas anteriores en tautologías, contingentes y contradicciones. ¿Cuáles son satisfacibles? ¿Cuáles son insatisfacibles?

Ejercicio 1.13 **[T]** Demostrar que las fórmulas que aparecen en la transparencia 19 del tema 1 son tautologías:

1.	$F \to F$	ley de identidad
2.	$F \lor \neg F$	ley del tercio excluso
3.	$\neg(F \land \neg F)$	principio de no contradicción
4.	$(\neg F \to F) \to F$	ley de Clavius
5.	$\neg F \to (F \to G)$	ley de Duns Scoto
6.	$((F \to G) \to F) \to F$	ley de Peirce
7.	$(F \to G) \land F \to G$	modus ponens
8.	$(F \to G) \land \neg G \to \neg F$	modus tollens

Ejercicio 1.14 **[Examen 30–Junio–2005]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.
2. Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.

Ejercicio 1.15 **[T]** Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 20 del tema 1:

1. Idempotencia: $F \lor F \equiv F \quad ; \quad F \land F \equiv F$.
2. Conmutatividad: $F \lor G \equiv G \lor F \quad ; \quad F \land G \equiv G \land F$.
3. Asociatividad: $F \lor (G \lor H) \equiv (F \lor G) \lor H \quad ; \quad F \land (G \land H) \equiv (F \land G) \land H$.
4. Absorción: $F \land (F \lor G) \equiv F \quad ; \quad F \lor (F \land G) \equiv F$.
5. Distributividad: $F \land (G \lor H) \equiv (F \land G) \lor (F \land H) \quad ; \quad F \lor (G \land H) \equiv (F \lor G) \land (F \lor H)$.
6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \land G) \equiv \neg F \lor \neg G \quad ; \quad \neg(F \lor G) \equiv \neg F \land \neg G$.

Ejercicio 1.16 **[T]** Demostrar que $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.

Ejercicio 1.17 Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decidir si son o no equivalentes:

1. $A \to B \to C$ y $A \wedge B \to C$
2. $A \to (B \wedge \neg C)$ y $A \to B \to C$
3. $\neg(A \leftrightarrow B)$ y $A \leftrightarrow \neg B$

Ejercicio 1.18 **[T]** Determinar cuáles de las siguientes interpretaciones es modelo del conjunto de fórmulas $S = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), q \to r\}$.

1. I_1 tal que $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1$.
2. I_2 tal que $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0$.

Ejercicio 1.19 **[T]** Calcular los modelos de los siguientes conjuntos de fórmulas y decidir cuáles son consistente.

1. $S_1 = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \to r\}$
2. $S_2 = \{(p \vee q) \wedge (\neg q \vee r), p \to r, \neg r\}$

Ejercicio 1.20 **[Examen 5–Abril–2006]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cup S_2$ es consistente.
2. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cap S_2$ es inconsistente.

Ejercicio 1.21 **[Examen 26–Junio–2006]** Demostrar o refutar las siguiente proposición:
Si $\{F \to G,\ F\}$ es consistente, entonces $\{G\}$ es consistente.

Ejercicio 1.22 ¿Existe un conjunto S de tres fórmulas tal que de todos los subconjuntos de S sólo uno es consistente?

Ejercicio 1.23 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. **[T]** $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$
2. **[T]** $\{p\} \not\models p \wedge q$
3. $\{p \vee q\} \models p \to q$
4. $\{p \to q, \neg r \to \neg q\} \models p \to r$
5. $\{p \wedge \neg p\} \models r \leftrightarrow r \vee q$
6. $\{p \to q, q \to p \wedge r\} \models p \to (p \ \to q) \to r$

Ejercicio 1.24 **[T]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para todo conjunto de fórmula S, $S \models S$.
2. Para todo conjunto de fórmula S_1 y toda fórmula F, si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
3. Para todo conjunto de fórmula S_1 y todo par de fórmulas F, G, si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.

Ejercicio 1.25 **[T]** Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
2. $\models F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \to G$
3. $\neg(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \to G)$ es insatisfacible
4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Ejercicio 1.26 **[Examen 7–Abril–2006]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \models F$ y $S \models \neg F$.
2. Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.

Ejercicio 1.27 [Examen 23–Septiembre–05] Demostrar o refutar las siguiente proposición:

Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.

Ejercicio 1.28 [T] Determinar la corrección del siguiente argumento.

Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

Ejercicio 1.29 Determinar si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. **[T]** Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.
2. **[T]** Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.
3. Si Juan es andaluz, entonces Juan es europeo. Juan es europeo. Por tanto, Juan es andaluz.
4. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
5. Siempre que un número x es divisible por 10, acaba en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 10.
6. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 1.30 [T] En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

1. A dice “B y C son veraces syss C es veraz”
2. B dice “Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso”
3. C dice “B es mentiroso syss A o B es veraz”

Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.

Ejercicio 1.31 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar la puerta que debe de elegir el prisionero.