Ejercicios resueltos

Ejercicio 10.1 Demostrar por resolución

1. $\{\forall x\,[P(x) \to Q(x)], \exists x\, P(x)\} \vdash \exists x\, Q(x)$
2. $\{\forall x\,[P(x) \to Q(x)], \forall x\,[Q(x) \to R(x)]\} \vdash \forall x\,[P(x) \to R(x)]$

Ejercicio 10.2 Decidir si la sustitución σ es un unificador de los términos t_1 y t_2 en cada uno de los siguientes casos, calculando una instancia común:

	t_1	t_2	σ
1	$f(x,g(z))$	$f(g(y),x)$	$[x/g(z),y/z]$
2	$f(x,g(z))$	$f(g(y),x)$	$[x/g(y),z/y]$
3	$f(x,g(z))$	$f(g(y),x)$	$[x/g(a),y/a]$
4	$f(x,y)$	$f(y,x)$	$[x/a,y/a]$
5	$f(x,y)$	$f(y,x)$	$[y/x]$
6	$f(x,y)$	$f(y,x)$	$[x/y]$

Ejercicio 10.3 Calcular la composición de las siguientes sustituciones
$\sigma_1 = [x/f(z,a),y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b,z/g(w)]$.

Ejercicio 10.4 Comparar los siguientes pares de sustituciones:

1. $\sigma_1 = [x/g(z),y/z]$ y $\sigma_2 = [x/g(y),z/y]$.
2. $\sigma_1 = [x/g(z),y/z]$ y $\sigma_3 = [x/g(a),y/a]$.
3. $\sigma_2 = [x/g(y),z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a),y/a]$.
4. $\sigma_4 = [x/a,y/a]$ y $\sigma_5 = [y/x]$

Ejercicio 10.5 Determinar si las siguientes parejas de términos son unificables y, en el caso de que lo sean, calcular un unificador de máxima generalidad:

1. $f(x,g(z))$ y $f(g(y),x)$.
2. $f(x,b)$ y $f(a,y)$.
3. $f(x,x)$ y $f(a,b)$.
4. $f(x,g(y))$ y $f(y,x)$.
5. $j(w,a,h(w))$ y $j(f(x,y),x,z)$.
6. $j(w,a,h(w))$ y $j(f(x,y),x,y)$.
7. $f(a,y)$ y $f(a,b)$.

Ejercicio 10.6 Calcular una separación de variables de las cláusulas
$C_1 = \{P(x),Q(x,y)\}$ y $C_2 = \{R(f(x,y))\}$.

Ejercicio 10.7 Calcular una resolvente binaria de las cláusulas
$C_1 = \{\neg P(x),Q(f(x))\}$ y $C_2 = \{\neg Q(x),R(g(x))\}$.

Ejercicio 10.8 Calcular un factor de la cláusula $\{P(x,y),P(y,x),Q(a)\}$.

Ejercicio 10.9 Demostrar por resolución que los siguientes conjuntos de cláusulas son inconsistentes:

1. $S_1 = \{\{\neg P(x, f(x,y))\},\{P(a,z),\neg Q(z,v)\},\{Q(u,a)\}\}$.

2. $S_2 = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$.
3. $S = \{\{P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(u,v), \neg P(v,u)\}\}$.

Ejercicio 10.10 Demostrar, por resolución,

1. $\{\forall x\, [P(x) \to Q(x)], \exists x\, P(x)\} \vdash_{Res} \exists x\, Q(x)$.
2. $\{\forall x\, [P(x) \to Q(x)], \forall x\, [Q(x) \to R(x)] \vdash_{Res} \forall x\, [P(x) \to R(x)]\}$.
3. $\vdash_{Res} \exists x\, [P(x) \to \forall y\, P(y)]$.
4. $\vdash_{Res} \forall x\, \exists\, y\, \neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$.

Ejercicio 10.11 (Paradoja del barbero de Russell) En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma:

> *"El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas"*.

Demostrar que la norma es inconsistente.

Ejercicio 10.12 Comprobar, por resolución, que

$\forall x\, [P(x) \lor Q(x)] \not\models \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$

y obtener un contamodelo a partir de la resolución.

Ejercios propuestos

Ejercicio 10.13 Para cada uno de los siguientes pares de términos determinar si son unificables y calcular un unificador de máxima generalidad en el caso de que lo sean.

1	$f(g(x),z)$	$f(y,h(y))$
2	$j(x,y,z)$	$j(f(y,y), f(z,z), f(a,a))$
3	$j(x,z,x)$	$j(y, f(y), z)$
4	$j(f(x),y,a)$	$j(y,z,z)$
5	$j(g(x),a,y)$	$j(z,x, f(z,z))$

Ejercicio 10.14 Demostrar o refutar, mediante resolución, cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x\, \forall y\, R(x,y) \to \forall y\, \exists x\, R(x,y)$
2. $\forall y\, \exists x\, R(x,y) \to \exists x\, \forall y\, R(x,y)$
3. $\exists x\, (P(x) \to \forall y\, P(y))$
4. $\exists x\, (P(x) \lor Q(x)) \to \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$
5. $\exists x\, (P(x) \land Q(x)) \to \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$
6. $\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x) \to \exists x\, (P(x) \land Q(x))$
7. $\exists x\, P(x) \land \forall x\, Q(x) \to \exists x\, (P(x) \land Q(x))$

Ejercicio 10.15 Se consideran las siguientes fórmulas

$$\begin{array}{ll} \textsf{transitiva} & := \forall x\, \forall y\, \forall z\, [R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)] \\ \textsf{simétrica} & := \forall x\, \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x)) \\ \textsf{reflexiva} & := \forall x\, R(x,x) \\ \textsf{notrivial} & := \forall x\, \exists y\, R(x,y) \end{array}$$

1. Demostrar que $\{\mathsf{transitiva}, \mathsf{simétrica}\} \not\models \mathsf{reflexiva}$.
2. Demostrar que $\{\mathsf{transitiva}, \mathsf{simétrica}, \mathsf{notrivial}\} \models \mathsf{reflexiva}$.

Ejercicio 10.16 Demostrar, por resolución, que si toda persona pobre tiene un padre rico, entonces existe una persona rica que tiene un abuelo rico.

Ejercicio 10.17 Demostrar mediante resolución cada una de las argumentaciones correctas de la relación de "*50 ejercicios de argumentación*".

Ejercicio 10.18 Los números naturales pueden representarse mediante la constante 0 y el símbolo de función s. Por ejemplo, el número 3 se representa por $s(s(s(0)))$. En dicha representación puede definirse la relación $suma(x,y,z)$, que significa que z es la suma de x e y, mediante el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \quad & \{\forall y\, suma(0,y,y), \\ & \forall x\, \forall y\, \forall z\, [suma(x,y,z) \rightarrow suma(s(x),y,s(z))]\} \end{aligned}$$

1. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, suma(s(0),s(s(0)),x)$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que $T \models suma(s(0),s(s(0)),t)$.
2. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, suma(x,s(s(0)),s(s(0)))$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que $T \models suma(t,s(s(0)),s(s(0)))$.
3. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, \exists y\, suma(x,y,s(s(0)))$ y, a partir de la demostración encontrar términos t_1 y t_2 tales que $T \models suma(t_1,t_2,s(s(0)))$.
4. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, \exists y\, [suma(s(0),x,y) \land suma(x,y.s(0))]$ y, a partir de la demostración encontrar términos t_1 y t_2 tales que $T \models suma(s(0),t_1,t_2) \land suma(t_1,t_2.s(0))$.

Ejercicio 10.19 Las listas pueden representarse mediante la constante vacía nil, el símbolo de función p y constantes atómicas. Por ejemplo,

- $p(1,p(2,nil))$ representa la lista cuyos elementos son 1 y 2,
- nil representa la lista vacía,
- $p(x,y)$ representa la lista cuyo primer elemento es x y cuyo resto es y,
- $p(p(1,nil),p(2,nil))$ representa la lista cuyos elementos son las listas $p(1,nil)$ y $p(2,nil)$.

En dicha representación pueden definirse las relaciones

- $c(x,y,z)$, que significa que z es la concatenación de x e y, y
- $e(x,y)$, que significa que x es un elemento de y,

mediante el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \quad & \{\forall y\, c(nil,y,y), \\ & \forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall u\, [c(x,y,z) \rightarrow c(p(u,x),y,p(u,z))] \\ & \forall x\, \forall y\, [\exists u\, \exists v\, c(u,p(x,v),y) \rightarrow e(x,y)]\} \end{aligned}$$

1. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, c(p(1,nil),p(2,p(1,nil)),x)$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que $T \models c(p(1,nil),p(2,p(1,nil)),t)$.
2. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, c(x,p(2,p(1,nil)),p(1,p(2,p(1,nil))))$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que $T \models c(t,p(2,p(1,nil)),p(1,p(2,p(1,nil))))$.

3. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, \exists y\, c(x,y,p(2,p(1,nil)))$ y, a partir de la demostración encontrar un término t tal que $T \models c(t_1,t_2,p(2,p(1,nil)))$.
4. Demostrar por resolución que $T \models \exists x\, e(x,p(2,p(1,nil)))$ y, a partir de la demostración encontrar términos t tales que $T \models e(t,p(2,p(1,nil)))$.

Ejercicios de exámenes

Ejercicio 10.20 [Examen de Septiembre de 2006] Decidir si el siguiente conjunto de fórmulas es consistente

$$\begin{aligned} S = \{\; & \forall x\, [A(x) \land \exists y\, [\neg B(y) \to C(x,y)]], \\ & \exists x\, A(x), \\ & \neg \forall y\, \exists z\, C(z,y), \\ & \forall y\, \exists x\, \forall z\, [(B(x) \to A(z)) \to (\neg C(y,z) \to \neg B(y))]\; \} \end{aligned}$$

Si S es consistente, obtener razonadamente un modelo de S.

Ejercicio 10.21 [Examen de Septiembre de 2006] Decidir, por resolución, si la fórmula

$$\forall x\, \exists y\, \forall z\, [P(z,y) \leftrightarrow \neg P(z,x)]$$

es consecuencia lógica de la fórmula

$$\exists y\, \forall x\, [P(x,y) \leftrightarrow P(x,x)].$$

Ejercicio 10.22 [Examen de Junio de 2006] Se considera el siguiente argumento:

Algunas personas admiran a los que tienen bigote. Algunas personas no simpatizan con nadie que admire a los que tienen bigote. Luego algunas personas no son simpáticas a todos.

1. Formalizar el argumento utilizando los símbolos $B(x)$: x tiene bigote, $A(x,y)$: x admira y, $S(x,y)$: x simpatiza con y.
2. Dedidir, mediante cualquiera de los métodos de demostración estudiados en el curso, la validez del argumento.

Ejercicio 10.23 [Examen de Junio de 2006] Se considera el conjunto

$$S = \{\forall x\, [P(x,y) \to \neg Q(z)],\; P(x,v),\; \exists u\, Q(u)\}$$

1. Probar que S es consistente.
2. Decidir si S tiene o no un modelo, justificando la respuesta.

Ejercicio 10.24 [Examen de Junio de 2006] Se consideran las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x\, \exists x_1\, \forall y\, \exists y_1\, \forall z\, \exists z_1\, P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \\ F_2 &= \exists x\, \forall x_1\, \exists y\, \forall y_1\, \exists z\, \exists u\, P(z,x,x_1,y,y_1,u) \\ F_3 &= \exists x\, \forall x_1\, \exists y\, \exists y_1\, \forall z\, \exists z_1\, P(x,x_1,y,y_1,z,z_1) \end{aligned}$$

Decidir, por resolución, las siguientes relaciones. Para las que no se verifiquen, dar un contramodelo.

1. $F_1 \models F_2$
2. $F_3 \models F_2$

Ejercicio 10.25 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\, [\forall y\, [P(x,y) \lor \neg Q(y)] \to \forall x\, \forall y\, [Q(y) \to P(x,y)]]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 10.26 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Se considera el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \{\ & \forall y\, P(0,y,y), \\ & \forall x\, \forall y\, \forall z\, [P(x,y,z) \to P(s(x),y,s(z))], \\ & Q(0), \\ & \forall x\, [Q(x) \to Q(s(s(x)))]\ \} \end{aligned}$$

Demostrar por resolución lineal que

$$T \models \exists x\, \exists y\, [P(x,s(y),s(s(0))) \land Q(s(x))]$$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t_1 y t_2 tales que

$$T \models P(t_1,s(t_2),s(s(0))) \land Q(s(t_1))$$

Ejercicio 10.27 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Decidir, mediante resolución, si

$$\forall x\, \forall y\, [\forall z\, [P(z,x) \to P(z,y)] \to Q(x,y)] \models \forall x\, Q(x,x)$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 10.28 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Se considera el siguiente conjunto de fórmulas

$$\begin{aligned} T = \{\ & \forall x\, \forall z\, R(x,p(x,z)), \\ & \forall x\, \forall y\, \forall z\, [R(x,z) \to R(x,p(y,z))]\} \end{aligned}$$

Demostrar por resolución lineal que

$$T \models \exists x\, R(x,p(a,p(b,nil)))$$

y, a partir de la demostración encontrar todos los términos t tales que

$$T \models R(t,p(a,p(b,nil)))$$

Ejercicio 10.29 [Examen de Junio de 2006 (segundo parcial)] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\, [P(x) \to Q(x)] \to \exists x\, P(x \to \exists x\, Q(x))$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 10.30 [Examen de Diciembre de 2005] Se considera el siguiente argumento:

Todo deprimido que estima a un submarinista es listo.
Cualquiera que se estime a sí mismo es listo.
Ningún deprimido se estima a sí mismo.
Por tanto, ningún deprimido estima a un submarinista.

Decidir, utilizando el método de resolución, si el argumento es válido. Si no es válido encontrar una interpretación en la que las premisas sean todas verdaderas y la conclusión sea falsa.
(NOTA: En la formalización, usar el siguiente vocabulario $D(x)$ significa que x está deprimido, $S(x)$ significa que x es submarinista, $L(x)$ significa que x es listo y $E(x,y)$ significa que x estima a y.)

Ejercicio 10.31 [Examen de Diciembre de 2005] Consideremos los dos siguientes enunciados en castellano

- E_1: Algunos robots sólo obedecen a los amigos del programador jefe.
- E_2: Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe.

y las cuatro fórmulas que siguen

- F_1: $\forall x\, \forall y\, [P(x) \land S(y,c) \to R(x,y)]$
- F_2: $\exists x\, [P(x) \land \forall y\, [R(x,y) \to S(y,c)]]$
- F_3: $\forall y\, [S(y,c) \to \neg\exists x\, [P(x) \land \neg R(x,y)]]$
- F_4: $\exists x\, \forall y\, [P(x) \land \neg(R(x,y) \land \neg S(y,c))]$

1. En una interpretación adecuada, dos de las fórmulas formalizan E_1 y las otras dos formalizan E_2. Explicar cuál es la interpretación y cuáles son las fórmulas que corresponden a cada uno de los dos enunciados.
2. Demostrar, calculando sus forma clausales, que las dos fórmulas correspondientes a E_1 son lógicamente equivalentes. Hacer lo mismo con las dos fórmulas correspondientes a E_2.
3. Consideremos ahora los nuevos enunciados:
   - E_3: Alvaro es amigo del programador jefe, pero Benito no le obedece.
   - E_4: Benito no es un robot.

   Demostrar, mediante resolución, que E_4 es consecuencia de E_2 y E_3.

Ejercicio 10.32 [Examen de Septiembre de 2005] En una pecera nadan una serie de peces. Se observa que:

1. Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.
2. No hay ningún pez que se coma a todos los demás.
3. Ningún pez protege a ningún otro.

Decidir, utilizando el método de resolución, si de las observaciones se deduce que existe algún tiburón en la pecera.
(NOTA: En la formalización, usar el siguiente glosario $C(x,y)$ significa que "x se come a y", $P(x,y)$ significa que "x protege a y" y $T(x)$ significa que "x es un tiburón".)

Ejercicio 10.33 [Examen de Septiembre de 2005] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\, \forall y\, \forall z\, [(P(y) \to Q(z)) \to (P(x) \to Q(x))]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 10.34 [Examen de Septiembre de 2005] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.
2. Para toda fórmula F se tiene que si G es una forma de Skolem de F entonces $\models F \leftrightarrow G$.

Ejercicio 10.35 [Examen de Junio de 2005] Se sabe que:

- Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.
- Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.
- No es verdad que todo el que estudia aprueba.

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Ejercicio 10.36 [Examen de Junio de 2005] Decidir, mediante resolución, si

$$\exists x\ \exists y\ [(R(x,y) \vee P(x,y)) \to \forall z\ \forall w\ [R(z,w) \wedge Q(z,w)]]$$

es consecuencia lógica de

$$\neg \exists x\ \exists y\ [Q(x,y) \to P(x,y)]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 10.37 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 2)] Decidir, mediante resolución, si

$$\{\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x)\} \models \forall x\ Q(x).$$

Obtener un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 10.38 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 2)] Decidir, mediante resolución, si

$$\models \exists x\ \exists y\ [P(x,y) \to \forall x\ \forall y\ P(x,y)].$$

Obtener un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 10.39 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 1)] Decidir, mediante resolución, si la siguiente fórmula es válida $\neg \forall x\ \forall y\ \exists z\ [R(x,y) \wedge (R(y,z) \to \neg R(z,z))]$. Obtener, a partir de la resolución, un contramodelo en el caso de que no sea válida.

Ejercicio 10.40 [Segundo parcial del 2004–05 (Grupo 1)] Decidir, mediante resolución, si

$$\{\forall x\ P(x) \to \forall x\ Q(x)\} \models \forall x\ [P(x) \to Q(x)]$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 10.41 [Examen de Diciembre de 2004] Sean S_1 y S_2 los conjuntos de fórmulas

$$S_1 = \{\forall x\ \forall y\ [P(x,y) \to P(y,x)], \quad \forall x\ \neg P(x,x), \quad \exists x\ \exists y\ P(x,y)\}$$

$$S_2 = \{\exists x\ Q(x), \quad \forall x\ [Q(x) \to R(x)], \quad \forall x\ \neg R(x)\}$$

e $\mathscr{I}_1 = (U_1, I_1), \mathscr{I}_2 = (U_2, I_2)$ las interpretaciones tales que

$$\begin{array}{llll} U_1 = \{a,b\} & I_1(P) = \{(a,b),\ (b,a)\} & I_1(Q) = \{a,b\} & I_1(R) = \{b\} \\ U_2 = \{a,b,c\} & I_2(P) = \{(a,b),\ (b,c),\ (c,a)\} & I_2(Q) = \{b\} & I_2(R) = \{a\} \end{array}$$

Para cada uno de los conjuntos S_1 y S_2 determinar cuáles de las interpretaciones $\mathscr{I}_1$ e $\mathscr{I}_2$ es modelo de dicho conjunto.

Ejercicio 10.42 [Examen de Septiembre de 2004] Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen. Para ello, dar una prueba por resolución y otra por deducción natural de cada una de las válidas y calcular un modelo de Herbrand de las que no lo son.

1. $\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \models \forall x\, [P(x) \lor Q(x)]$
2. $\forall x\, [P(x) \lor Q(x)] \models \forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)$
3. $\exists x\, [P(x) \land Q(x)] \models \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$

Ejercicio 10.43 [Examen de Septiembre de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.

(a) Probar que las fórmulas $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ y $\exists x\, \forall y\, P(x,y)$ no son equivalentes dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.

(b) En la estructura M cuyo universo es $|M| = \{a,b,c\}$ y $P^M = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?
   1. $\forall x\, \exists y\, P(x,y) \to \exists x\, \forall y\, P(x,y)$
   2. $\exists x\, \forall y\, P(x,y) \to \forall x\, \exists y\, P(x,y)$
   3. $\neg[\forall x\, \exists y\, P(x,y) \land \exists x\, \forall y\, P(x,y)]$

Ejercicio 10.44 [Examen de Junio de 2004] Sabemos que

1. Cualquiera que estudie lo suficiente aprueba todas las asignaturas.
2. Cuando alguien que celebra su cumpleaños en julio ha aprobado todas las asignaturas, se le obsequia con un regalo.
3. Quien recibe un regalo sin estudiar lo suficiente, nunca es obsequiado con un móvil.
4. Pablo es un alumno que, a pesar de no estudiar lo suficiente, recibió un móvil como regalo.

Se pide:

(a) Formalizar los conocimientos anteriores teniendo en cuenta que los predicados del texto se representan así: $C(x)$ = “x celebra su cumpleaños en julio”; $A(x)$ = “x ha aprobado todas las asignaturas”; $S(x)$ = “x estudia lo suficiente”; $R(x,y)$ = “x recibe el regalo y”. Y las constantes a y b representan respectivamente a Pablo y al móvil.

(b) Obtener el conjunto de cláusulas de las fórmulas anteriores y probar que es inconsistente dando un subconjunto de su extensión de Herbrand que lo sea.

(c) Probar, mediante resolución, que el enunciado *“Si Pablo recibe un móvil como regalo, entonces ha aprobado todas las asignaturas”* es consecuencia lógica de los enunciados 1 y 3.

Ejercicio 10.45 [Examen de Junio de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q, (de aridad 2) y un símbolo de función, f, (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathscr{I}$ dada por: Universo: $\{a,b\}$, $Q^I = \{(a,b),(b,a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $\forall x\, [Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

2. $\exists x\, [Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

Ejercicio 10.46 [Examen de Septiembre de 2003] Consideremos los siguientes hechos acerca de la sucesión de los integrantes de la monarquía inglesa:

1. El primogénito de un rey hereda la corona de dicho rey.
2. Si alguien derrota a un rey entonces hereda su corona.
3. Si alguien hereda la corona de un rey entonces se convierte en rey.
4. Enrique VIII era el primogénito de Enrique VII.
5. Ricardo III era rey y Enrique VII derrotó a Ricardo III.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los símbolos de predicado: $D(x,y)$: x derrota a y, $H(x,y)$: x hereda la corona de y, $R(x)$: x es rey, $P(x,y)$: x es el primogénito de y. Las constantes a,b,c denotarán, respectivamente, a Ricardo III, Enrique VII y Enrique VIII.

(b) A partir de la información anterior, probar, mediante resolución, que Enrique VIII fue rey.

Ejercicio 10.47 [Examen de Septiembre 2003] Se considera el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b\}$ y el conjunto de fórmulas: $S = \{\forall x\, [P(a,x) \to P(b, f(x))], \forall x\, [P(f(x),x) \to \forall z\, P(z,b)], P(a, f(a)) \land P(f(b),b)\}$. Probar, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models \exists x\, [P(x,a) \land P(f(x),b)]$.

Ejercicio 10.48 [Examen de Septiembre de 2003] Hallar las formas prenexa, de Skolem y clausal de la fórmula: $\neg\exists x\, \forall z\, [P(x) \to \neg Q(z)] \lor \exists z\, A(y,z \to \exists u\, B(y,u))$

Ejercicio 10.49 [Examen de Junio de 2003] Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:

1. Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.
2. Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.
3. Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.
4. Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

Se pide:

(a) Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $D(x)$: “x es un delegado”, $Ap(x,y)$: “x aprueba la asignatura y”. Las constantes a,b,m denotarán la asignatura A, la asignatura B y a Manuel, respectivamente.

(b) Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.

(c) Probar, mediante resolución, que si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

Ejercicio 10.50 [Examen de Junio 2003] Consideramos el lenguaje $L_1 = \{P, f, a, b, c\}$ y el conjunto de fórmulas:

$$S = \{P(c,a) \to \forall z\, P(z,b), \forall x\, [P(f(x),x) \to \forall z\, P(z,x)], \neg P(b,c)\}$$

Probar, proporcionando un modelo de Herbrand, que $S \not\models P(f(a),a) \lor \neg P(f(b),b)$.

Ejercicio 10.51 [Examen de Septiembre de 2002] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{P, Q\}$ y las fórmulas de L:

$F_1 : \exists x\ [P(x) \land Q(x)]$.
$F_2 : \exists x\ P(x) \land \exists x\ Q(x)$,
$F_3 : \exists x\ \exists y\ [P(x) \land Q(y)]$

1. Hallar una L estructura $\mathscr{I}$ tal que $\mathscr{I} \models F_2$ pero $\mathscr{I} \not\models F_1$.
2. Probar que todo modelo de F_1 es modelo de F_2.
3. Probar que F_2 y F_3 son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 10.52 [Examen de Junio de 2002] En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:

- A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.
- Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.
- Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.
- Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

Se pide:

1. Formalizar los enunciados anteriores en un lenguaje de primer orden usando los siguientes símbolos de predicado: $P(x)$: "x es portero", $D(x)$: "x es delantero europeo", $N(x)$: "x viste camiseta negra", $B(x)$: "x juega con botas blancas", $M(x,y)$: "x marcó un gol a y".
2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas del apartado anterior.
3. Probar, mediante resolución, que algún delantero europeo jugó con botas blancas.

Ejercicio 10.53 [Examen de Septiembre de 2001] Se conocen los siguientes hechos:

1. Todos los ordenadores son máquinas.
2. El TX–150 es un ordenador.
3. Félix puede arreglar, o bien estropear, cualquier máquina.
4. Cada cosa puede ser arreglada por alguien.
5. Las cosas solamente desesperan a quienes no son capaces de arreglarlas.
6. El TX–150 desespera a Félix.
7. Ninguna máquina puede ser arreglada por sí misma.

Se pide:

(a) Formalizar los hechos anteriores utilizando los siguientes símbolos de predicado: $O(x)$: "x es un ordenador", $M(x)$: "x es una máquina", $A(x,y)$: "x puede arreglar y", $E(x,y)$: "x estropea y" y $D(x,y)$: "x desespera a y" . Y a, b como constantes para TX–150 y Félix, respectivamente.

(b) Utilizando resolución responder a las siguientes preguntas: ¿Puede arreglar Félix el TX–150? ¿Estropea Félix el TX–150?

Ejercicio 10.54 [Examen de Junio de 2001] Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:

- Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.
- Todo el mundo es hijo de alguien.

- Nadie es hijo del hermano de su padre.
- Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.
- Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Se pide:

1. Formalizar los conocimientos anteriores en un lenguaje de primer orden usando tan solo:
   - A, L, a, m como constantes para D. Antonio, D. Luis, Antoñito y Manolito, respectivamente.
   - Los predicados: $\mathsf{Her}(x, y) =$ "x es hermano de y", $\mathsf{Hijo}(x, y) =$ "x es hijo de y".
2. Obtener una forma clausal para el conjunto de fórmulas obtenido en el apartado 1.
3. Decidir mediante resolución si Don Luis es el padre de Manolito o no.