

Lógica informática (2006–07)

Tema 2: Deducción natural proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

1

DN: Reglas de la conjunción

- Regla de introducción de la conjunción: $\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$
- Reglas de eliminación de la conjunción: $\frac{F \wedge G}{F} \wedge e$ $\frac{F \wedge G}{G} \wedge e$
- Ejemplo: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$:
 - $p \wedge q$ premisa
 - r premisa
 - q $\wedge e$ 1
 - $q \wedge r$ $\wedge i$ 2,3
- Adecuación de las reglas de la conjunción:
 - $\wedge i : \{F, G\} \models F \wedge G$
 - $\wedge e : F \wedge G \models F$
 - $\wedge e : F \wedge G \models G$

2

DN: Reglas de la doble negación

- Regla de eliminación de la doble negación: $\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
- Regla de introducción de la doble negación: $\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$
- Ejemplo: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$:
 - p premisa
 - $\neg\neg(q \wedge r)$ premisa
 - $\neg\neg p$ $\neg\neg i$ 1
 - $q \wedge r$ $\neg\neg e$ 2
 - r $\wedge e$ 4
 - $\neg\neg p \wedge r$ $\wedge i$ 3,5
- Adecuación de las reglas de la doble negación:
 - $\neg\neg e : \{\neg\neg F\} \models F$
 - $\neg\neg i : \{F\} \models \neg\neg F$

3

DN: Regla de eliminación del condicional

- Regla de eliminación del condicional: $\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$
- Ejemplo: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$:
 - $\neg p \wedge q$ premisa
 - $\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$ premisa
 - $r \vee \neg p$ $\rightarrow e$ 1,2
- Ejemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$:
 - p premisa
 - $p \rightarrow q$ premisa
 - $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ premisa
 - q $\rightarrow e$ 1,2
 - $q \rightarrow r$ $\rightarrow e$ 1,3
 - r $\rightarrow e$ 4,5
- Adecuación de la eliminación del condicional: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$

4

DN: Regla derivada de modus tollens (MT)

• Regla derivada de modus tollens:
$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{MT}$$

• Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2	p	premisa
3	$\neg r$	premisa
4	$q \rightarrow r$	$\rightarrow e$ 1, 2
5	$\neg q$	MT 3, 4

• Ejemplo: $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1	$\neg p \rightarrow q$	premisa
2	$\neg q$	premisa
3	$\neg\neg p$	MT 1, 2
4	p	$\neg\neg e$ 3

5

DN: Regla de introducción del condicional

• Ejemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1	$\neg q \rightarrow \neg p$	premisa
2	p	supuesto
3	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4	$\neg\neg q$	MT 1, 3
5	$p \rightarrow \neg\neg q$	$\rightarrow i$ 2-4

• Ejemplo (de teorema): $\vdash p \rightarrow p$:

1	p	supuesto
2	$p \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 1-1

7

DN: Regla de introducción del condicional

• Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline G \\ \hline \end{array}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

• Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1	$p \rightarrow q$	premisa
2	$\neg q$	supuesto
3	$\neg p$	MT 1, 2
4	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 2-3

• Adecuación de la regla de introducción del condicional:
Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

6

DN: Regla de introducción del condicional

• Ejemplo: $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$:

1	$q \rightarrow r$	supuesto
2	$\neg q \rightarrow \neg p$	supuesto
3	p	supuesto
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5	$\neg\neg q$	MT 2, 4
6	q	$\neg\neg e$ 5
7	r	$\rightarrow e$ 1, 6
8	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-7
9	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-8
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1-9

8

DN: Reglas de la disyunción

- Reglas de introducción de la disyunción: $\frac{F}{F \vee G} \vee i_1$ $\frac{G}{F \vee G} \vee i_2$
- Regla de eliminación de la disyunción: $\frac{F \vee G \quad \begin{array}{|c|} \hline F \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline G \\ \hline \vdots \\ \hline H \\ \hline \end{array}}{H} \vee e$
- Ejemplo: $p \vee q \vdash q \vee p$:

1	$p \vee q$	premisa
2	p	supuesto
3	$q \vee p$	$\vee i_2$
4	q	supuesto
5	$q \vee p$	$\vee i_4$
6	$q \vee p$	$\vee e$ 1, 2-3, 4-5

9

DN: Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

1	p	supuesto
2	q	supuesto
3	p	hyp 1
4	$q \rightarrow p$	$\rightarrow i$ 2-3
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\rightarrow i$ 1-4

11

DN: Reglas de la disyunción

- Ejemplo: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$:

1	$q \rightarrow r$	premisa
2	$p \vee q$	supuesto
3	p	supuesto
4	$p \vee r$	$\vee i_3$
5	q	supuesto
6	r	$\rightarrow e$ 1, 5
7	$p \vee r$	$\vee i_6$
8	$p \vee r$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-7
9	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow i$ 2-8

10

DN: Reglas de la negación

- Extensiones de la lógica para usar falso:
 - Extensión de la sintaxis: \perp es una fórmula proposicional.
 - Extensión de la semántica: $I(\perp) = 0$ en cualquier interpretación I .

- Reglas de la negación:

- Regla de eliminación de lo falso: $\frac{\perp}{F} \perp e$
- Regla de eliminación de la negación: $\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$

- Adecuación de las reglas de la negación:

- $\perp \models F$
- $\{F, \neg F\} \models \perp$

12

DN: Reglas de la negación

- Ejemplo: $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$:

1	$\neg p \vee q$	premisa
2	p	supuesto
3	$\neg p$	supuesto
4	\perp	$\neg e$ 2,3
5	q	$\perp e$ 4
6	q	supuesto
7	q	$\vee e$ 1,3-5,6-6
8	$p \rightarrow q$	$\rightarrow i$ 2-7

13

DN: Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional:
- Ejemplo: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$:

$$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$$

1	$p \wedge q$	supuesto
2	p	$\wedge e$ 1
3	q	$\wedge e$ 1
4	$q \wedge p$	$\wedge i$ 2,3
5	$p \wedge q \rightarrow q \wedge p$	$\rightarrow i$ 1-4
6	$q \wedge p$	supuesto
7	q	$\wedge e$ 6
8	p	$\wedge e$ 6
9	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7,8
10	$q \wedge p \rightarrow p \wedge q$	$\rightarrow i$ 6-9
11	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$	$\leftrightarrow i$ 5,10

15

DN: Reglas de la negación

- Regla de introducción de la negación:

$$\frac{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg F} \neg i$$

- Adecuación: Si $F \models \perp$, entonces $\models \neg F$.
- Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:

1	$p \rightarrow q$	premisa
2	$p \rightarrow \neg q$	premisa
3	p	supuesto
4	q	$\rightarrow e$ 1,3
5	$\neg q$	$\rightarrow e$ 2,3
6	\perp	$\neg e$ 4,5
7	$\neg p$	$\neg i$ 3-6

14

DN: Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional:
- Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$:

$$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$$

1	$p \leftrightarrow q$	premisa
2	$p \vee q$	premisa
3	p	supuesto
4	$p \rightarrow q$	$\leftrightarrow e$ 1
5	q	$\rightarrow e$ 4,3
6	$p \wedge q$	$\wedge i$ 3,5
7	q	supuesto
8	$q \rightarrow p$	$\leftrightarrow e$ 1
9	p	$\rightarrow e$ 8,7
10	$p \wedge q$	$\wedge i$ 7,9
11	$p \wedge q$	$\vee e$ 2,3-6,7-10

16

DN: Reglas derivadas: modus tollens

- Regla derivada de modus tollens (MT):

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} \text{ MT}$$

- Derivación

1	$F \rightarrow G$	premisa
2	$\neg G$	premisa
3	F	supuesto
4	G	\rightarrow e 1, 3
5	\perp	\neg e 2, 4
6	$\neg F$	\neg i 2 - 4

DN: Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

- Regla de reducción al absurdo:

$$\frac{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{F} \text{ RAA}$$

- Derivación:

1	$\neg F \rightarrow \perp$	premisa
2	$\neg F$	supuesto
3	\perp	\rightarrow e 1, 2
4	$\neg\neg F$	\neg i 2 - 3
5	F	\neg e \neg 4

17

19

DN: Reglas derivadas: introducción de doble negación

- Regla de introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \text{ } \neg\neg$$

- Derivación:

1	F	premisa
2	$\neg F$	supuesto
3	\perp	\neg e 1, 2
4	$\neg\neg F$	\neg i 2 - 3

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ley del tercio excluido (LEM):

$$\frac{}{F \vee \neg F} \text{ LEM}$$

- Derivación:

1	$\neg(F \vee \neg F)$	supuesto
2	F	supuesto
3	$F \vee \neg F$	\vee i 2
4	\perp	\neg e 1, 3
5	$\neg F$	\neg i 2 - 4
6	$F \vee \neg F$	\vee i 5
7	\perp	\neg e 1, 6
8	$F \vee \neg F$	RAA 1 - 7

18

20

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$:

1 $p \rightarrow q$ premisa

2 $p \vee \neg p$ LEM

3 p supuesto

4 q \rightarrow e 1,3

5 $\neg p \vee q$ \vee i 4

6 $\neg p$ supuesto

7 $\neg p \vee q$ \vee i 6

8 $\neg p \vee q$ \vee e 2,3-5,6-7

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
\neg	$\frac{\boxed{F} \quad \vdots \quad \perp}{\neg F} \neg i$	$\frac{F \quad \neg F}{\perp} \neg e$
\perp		$\frac{\perp}{F} \perp e$
$\neg\neg$		$\frac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
\leftrightarrow	$\frac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$	$\frac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G} \leftrightarrow e_1 \quad \frac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F} \leftrightarrow e_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

21

23

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
\wedge	$\frac{F \quad G}{F \wedge G} \wedge i$	$\frac{F \wedge G}{F} \wedge e_1 \quad \frac{F \wedge G}{G} \wedge e_2$
\vee	$\frac{F}{F \vee G} \vee i_1 \quad \frac{G}{F \vee G} \vee i_2$	$\frac{F \vee G \quad \boxed{F} \quad \vdots \quad \boxed{G} \quad \vdots \quad H}{H} \vee e$
\rightarrow	$\frac{\boxed{F} \quad \vdots \quad G}{F \rightarrow G} \rightarrow i$	$\frac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$

22

24

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000).
Cap. 16: Cálculo deductivo.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).
- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002).
Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
Cap. 1: Propositional logic.
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 3.6: El método de la deducción natural.