Ejercicio 2.1 [T] Probar mediante deducción natural:

1. $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$
2. $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$
3. $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$
4. $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$
6. $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$
7. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
8. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$
9. $\vdash p \rightarrow p$
10. $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$
11. $p \vee q \vdash q \vee p$
12. $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$
13. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
14. $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$
15. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$
16. $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
17. $p \leftrightarrow q, p \vee q \vdash p \wedge q$
18. $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$

Ejercicio 2.2 [T] Demostrar la adecuación de las reglas de deducción natural:

1. $\wedge$ i: $\{F, G\} \models F \wedge G$
2. $\wedge$ e: $F \wedge G \models F$
3. $\wedge$ e: $F \wedge G \models G$
4. $\neg\neg$ e: $\{\neg\neg F\} \models F$
5. $\neg\neg$ i: $\{F\} \models \neg\neg F$
6. $\rightarrow$ e: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$
7. $\rightarrow$ i: Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.
8. $\perp$ e: $\perp \models F$
9. $\neg$ e: $\{F, \neg F\} \models \perp$
10. $\neg$ i: Si $F \models \perp$, entonces $\models \neg F$.

Ejercicio 2.3 [T] Demostrar las reglas derivadas.

1. Modus tollens:

$$\frac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$$

2. Introducción de la doble negación:

$$\frac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$$

3. Reducción al absurdo:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg F \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{F} RAA$$

4. Ley del tercio excluido:

$$\frac{\quad}{F \vee \neg F} LEM$$

Ejercicio 2.4 Probar mediante deducción natural:

1. $p, p \rightarrow q \vdash q$
2. $p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \vdash r$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$
4. $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)$
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. $p \vdash q \rightarrow p$
8. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
9. $p \rightarrow q \vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
10. $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)) \vdash r \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow s))$
11. $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
12. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
13. $p, q \vdash p \wedge q$
14. $p \wedge q \vdash p$
15. $p \wedge q \vdash q$
16. $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$
17. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
18. $p \wedge q \vdash p \rightarrow q$
19. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$
20. $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
21. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
22. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
23. $p \vdash p \vee q$
24. $q \vdash p \vee q$
25. $p \vee q \vdash q \vee p$
26. $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$
27. $p \vee p \vdash p$
28. $p \vdash p \vee p$
29. $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$
30. $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$
31. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
32. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$
33. $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
34. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$
35. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \vee q) \rightarrow r$
36. $(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
37. $p \vdash \neg \neg p$
38. $\neg p \vdash p \rightarrow q$
39. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
40. $p \vee q, \neg q \vdash p$
41. $p \vee q, \neg p \vdash q$
42. $p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$
43. $p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$

44. $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$
45. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$
46. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
47. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$
48. $p \wedge \neg p \vdash q$
49. $\neg\neg p \vdash p$
50. $\vdash p \vee \neg p$
51. $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
52. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$
53. $\neg(\neg p \wedge q) \vdash p \vee q$
54. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$
55. $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$
56. $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Ejercicio 2.5 [T] Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 20 del tema 1:

1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$; $F \wedge F \equiv F$.
2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$; $F \wedge G \equiv G \wedge F$.
3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$; $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$.
4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$; $F \vee (F \wedge G) \equiv F$.
5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$; $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$.
6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$; $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$.

Ejercicio 2.6 Demostrar, por deducción natural, la corrección del siguiente argumento: *Se sabe que*

1. *Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.*
2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*
3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*
4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 2.7 Demostrar, por deducción natural, la corrección de los siguientes argumentos.

1. Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.
2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen constantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
3. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 2.8 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar por deducción natural que la dama está en la segunda puerta.

Ejercicio 2.9 Probar mediante deducción natural:

1. [Examen de Junio de 2004]

$$(E \vee F) \rightarrow G \vdash (E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)$$

2. [Examen de Septiembre de 2004]

$$\vdash (E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$$

3. [Examen de Abril de 2005]

- a) $\{p \rightarrow r, r \rightarrow \neg q\} \models \neg(p \wedge q)$
- b) $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$
- c) $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$
- d) $(p \vee (q \rightarrow p)) \wedge q \vdash p$
- e) $\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$
- f) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \models p \rightarrow (q \wedge r)$
- g) $(p1 \rightarrow p2) \wedge (q1 \rightarrow q2) \vdash (p1 \wedge q1 \rightarrow p2 \wedge q2)$
- h) $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$
- i) $\vdash ((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$
- j) $((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge r)) \vdash \neg q \vee (p \vee r)$

4. [Examen de Junio de 2005]

$$p \wedge \neg(q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \wedge \neg r$$

5. [Examen de Septiembre de 2005]

$$\vdash ((p \rightarrow (q \wedge \neg r)) \rightarrow p) \rightarrow p$$

6. [Examen de Diciembre de 2005]

$$\vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow \neg(q \vee r))$$

7. [Examen de Abril de 2006]

- a) $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash p \vee r.$
- b) $\vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q).$
- c) $\neg(\neg q \wedge p) \vdash p \rightarrow q.$
- d) $\neg p \vee (r \rightarrow q) \vdash \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r).$
- e) $\neg(p \wedge q) \vdash p \rightarrow \neg q.$
- f) $(p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge r \vdash \neg q \vee (\neg p \vee r).$
- g) $(p \rightarrow q) \wedge ((\neg r \vee q) \rightarrow s) \vdash \neg(p \wedge \neg s).$
- h) $\vdash (\neg(s \vee (p \rightarrow q))) \rightarrow (p \wedge \neg q \wedge \neg s).$

8. [Examen de Junio de 2006]

$$\vdash ((p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s))$$

9. [Examen de Septiembre de 2006]

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \vdash (p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$$

10. [Examen de Diciembre de 2006]

$$\vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \vee (q \rightarrow p)$$