Ejercicio 3.1 Para cada una de las siguientes fórmulas, determinar si están en FNC, en FND, en ambas o en ninguna de las dos.

1. **[T]** $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$.
2. **[T]** $(\neg p \lor q) \land (q \to p)$.
3. **[T]** $(\neg p \land q) \lor (\neg q \land p)$.
4. **[T]** $(\neg p \land q) \lor (q \to p)$.
5. $(p \lor q) \land (r \lor \neg p) \land s$.
6. $p \lor q \lor s$.
7. $p \land (\neg p \lor q) \land (p \to s)$.
8. $t \lor q \lor r \land s$.

Ejercicio 3.2 Demostrar, por deducción natural, las reglas de normalización:

1. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \land (B \to A)$.
2. $A \to B \equiv \neg A \lor B$.
3. $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$.
4. $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$.
5. $\neg\neg A \equiv A$.
6. $A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$.
7. $(A \land B) \lor C \equiv (A \lor C) \land (B \lor C)$.
8. $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$.
9. $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$.

Ejercicio 3.3 Calcular una forma normal conjuntiva de cada una de las siguientes fórmulas

1. **[T]** $\neg(p \land (q \to r))$.
2. **[T]** $(p \to q) \lor (q \to p)$.
3. **[T]** $(p \leftrightarrow q) \to r$.

Ejercicio 3.4 Calcular una forma normal disjuntiva de cada una de las siguientes fórmulas

1. **[T]** $\neg(p \land (q \to r))$.
2. **[T]** $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$.

Ejercicio 3.5 **[T]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. $F_1 \land \cdots \land F_n$ es una tautología syss $F_1, \ldots, F_n$ lo son.
2. $L_1 \lor \cdots \lor L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).

Ejercicio 3.6 **[T]** Decidir, mediante forma normal conjuntiva, si las siguientes fórmulas son tautotologías. En el caso de de que no lo sean calcular sus contramodelos a partir de su FNC.

1. $\neg(p \land (q \to r))$.
2. $(p \to q) \lor (q \to p)$.
3. $(p \leftrightarrow q) \to r$.

Ejercicio 3.7 **[T]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones

1. $F_1 \vee \cdots \vee F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ lo es.
2. $L_1 \wedge \cdots \wedge L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.

Ejercicio 3.8 **[T]** Decidir, mediante forma normal disyuntiva, si las siguientes fórmulas son satisfacibles. En el caso de de que lo sean calcular sus modelos a partir de su FND.

1. $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$.
2. $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$.

Ejercicio 3.9 Para cada una de las siguientes fórmulas

1. $\neg(p \leftrightarrow q \rightarrow r)$.
2. $\neg(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \vee r)$.
3. $(p \rightarrow r \vee s) \wedge (r \rightarrow s) \wedge \neg(p \rightarrow s)$.

a. Calcular una FNC, decidir si es o no una tautología y determinar, en su caso, todos sus contramodelos.
b. Calcular una FND, decidir si es o no satisfacible y determinar, en su caso, todos sus modelos.

Ejercicio 3.10 Empleando una FNC o bien una FND, según consideres más adecuado, decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \leftrightarrow q, q \vee s\} \models s \rightarrow p$.
2. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$.

Ejercicio 3.11 Determinar una FNC y una FND de la fórmula F cuya tabla de verdad es la siguiente:

p	q	r	F
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Ejercicio 3.12 **[Examen de Diciembre de 2000]** Probar, mediante forma normal conjuntiva. que la fórmula

$$(p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

es una tautología

Ejercicio 3.13 [Examen de Junio de 2001] Decidir, utilizando formas normales, si la fórmula

$$(p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg r)) \wedge (r \rightarrow \neg q)$$

es insatisfactible o una tautología.

Ejercicio 3.14 [Examen de Diciembre de 2003] Utilizando una forma normal, probar que

$$\neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$$

es satisfactible.

Ejercicio 3.15 [Examen de Septiembre de 2004] Probar, usando formas normales, que la fórmula

$$(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$$

es una tautología.

Ejercicio 3.16 [Examen de Abril de 2005] Sea F la fórmula $p \vee q \leftrightarrow \neg r$. Calcular una forma normal conjuntiva de F y, a partir de ella, determinar los contramodelos de F y decidir si F es una tautología.

Ejercicio 3.17 [Examen de Abril de 2005] Calcular una forma normal conjuntiva de la fórmula F sabiendo que está compuesta con las tres variables p, q y r y que, para toda interpretación I, se tiene que

$$I(F) = \begin{cases} 1, & \text{si } I(p) = I(\neg q \vee r) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejercicio 3.18 [Examen de Abril de 2005] Calcular una forma normal disyuntiva de A y una forma normal conjuntiva de $\neg A$ siendo A la fórmula cuya tabla de verdad es

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Ejercicio 3.19 [Examen de Diciembre de 2005] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Sean G_1 una forma normal disyuntiva de F_1 y G_2 una forma normal disyuntiva de F_2. Si F_1 y F_2 son equivalentes, entonces G_1 y G_2 son fórmulas iguales.
2. Para toda fórmula F se tiene que si G_1 es una forma normal conjuntiva de F y G_2 es una forma normal normal disyuntiva de F, entonces G_1 y G_2 son fórmulas distintas.