

Lógica informática (2006–07)

Tema 3: Formas normales

José A. Alonso Jiménez

María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Formas normales: Forma normal conjuntiva

- Átomos y literales:
 - ▶ Def.: Un **átomo** es un variable proposicional (p.e. $p, q, \dots$).
 - ▶ Def.: Un **literal** es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
 - ▶ Notación: $L, L_1, L_2, \dots$ representarán literales.
- Forma normal conjuntiva:
 - ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma
$$(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m}).$$
 - ▶ Ejemplos: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ está en FNC.
 $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ no está en FNC.
 - ▶ Def.: Una fórmula G es una **forma normal conjuntiva (FNC)** de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$.

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva:
 - ▶ **Algoritmo:** Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F , $FNC(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (6)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (7)$$

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$\begin{aligned} & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \\ \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) && [\text{por (2)}] \\ \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) && [\text{por (3)}] \\ \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) && [\text{por (4)}] \\ \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) && [\text{por (5)}] \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) && [\text{por (6)}] \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \\ \equiv & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) && [\text{por (2)}] \\ \equiv & \neg p \vee q \vee \neg q \vee p \end{aligned}$$

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$$

$$\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow r \quad [(1)]$$

$$\equiv \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r \quad [(2)]$$

$$\equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r \quad [(2)]$$

$$\equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee r \quad [(3)]$$

$$\equiv ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p)) \vee r \quad [(4)]$$

$$\equiv ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee r \quad [(5)]$$

$$\equiv (((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p)) \vee r \quad [(6)]$$

$$\equiv (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p))) \vee r \quad [(7)]$$

$$\equiv (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee r) \wedge (((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \quad [(7)]$$

$$\equiv (((p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg q \vee q) \vee r)) \wedge (((p \vee \neg p) \vee r) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \vee r)) \quad [(7)]$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$

$$\equiv (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$

Formas normales: Forma normal disyuntiva

- Forma normal disyuntiva:
 - ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal disyuntiva (FND)** si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma
$$(L_{1,1} \wedge \cdots \wedge L_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (L_{m,1} \wedge \cdots \wedge L_{m,n_m}).$$
 - ▶ Ejemplos: $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ está en FND.
 $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ no está en FND.
 - ▶ Def.: Una fórmula G es una **forma normal disyuntiva (FND)** de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo: Una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$.

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva:
 - ▶ **Algoritmo:** Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F , $FND(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (6)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad (7)$$

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$\begin{aligned} & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \\ \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) && [\text{por (2)}] \\ \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) && [\text{por (3)}] \\ \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) && [\text{por (4)}] \\ \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) && [\text{por (5)}] \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$:

$$\begin{aligned} & \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \\ \equiv & \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \wedge q)) && [\text{por (2)}] \\ \equiv & \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(p \wedge q) && [\text{por (4)}] \\ \equiv & (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q) && [\text{por (5)}] \\ \equiv & (\neg p \wedge (p \wedge q)) \vee (\neg q \wedge (p \wedge q)) && [\text{por (7)}] \\ \equiv & (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q) \end{aligned}$$

Decisión de validez mediante FNC

- Literales complementarios:

▶ El **complementario** de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$

- Propiedades de reducción de tautologías:

▶ $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ es una tautología syss $F_1, \dots, F_n$ lo son.

▶ $L_1 \vee \dots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).

- **Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC**

▶ Entrada: Una fórmula F .

▶ Procedimiento:

1. Calcular una FNC de F .

2. Decidir si cada una de las conjunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

Decisión de validez mediante FNC

- Ejemplos de decisión de tautologías mediante FNC
 - ▶ $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ no es tautología:
FNC($\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$) = $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$
Contramodelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:
 v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$
 v_2 tal que $v_2(p) = 1$ y $v_2(r) = 1$
 - ▶ $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es tautología:
FNC($(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$) = $\neg p \vee q \vee \neg q \vee p$
 - ▶ $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ no es tautología:
FNC($(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$) = $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$
Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:
 v_1 tal que $v_1(p) = 0, v_1(q) = 0$ y $v_1(r) = 0$
 v_2 tal que $v_2(p) = 1, v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- Propiedades de reducción de satisfacibilidad:
 - ▶ $F_1 \vee \dots \vee F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ lo es.
 - ▶ $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
 - ▶ Entrada: Una fórmula F .
 - ▶ Procedimiento:
 1. Calcular una FND de F .
 2. Decidir si alguna de las disyunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND:

- ▶ $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es satisfacible:

$$\text{FND}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

Modelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$v_1 \text{ tal que } v_1(p) = 0$$

$$v_2 \text{ tal que } v_2(q) = 1 \text{ y } v_2(r) = 0$$

- ▶ $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ es insatisfacible:

$$\text{FND}(\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))) = (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000)
Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).
2. M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001)
Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)
Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
Cap. 1 (Propositional logic).
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 4.4 (Formas normales).