

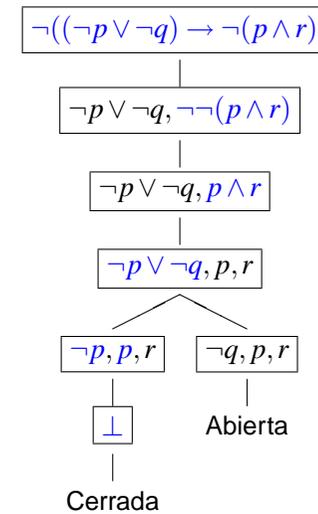
Lógica informática (2006–07)

Tema 4: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

- Tablero semántico:



1

3

Búsqueda de modelos y forma normal disyuntiva

- Búsqueda de modelo y FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$

$$I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$$

$$\text{syss } I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\}$$

$$\text{syss } I \models \{p, r, \neg p \vee \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}$$

- Modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:

Las interpretaciones I tales que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

- Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:

$$\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)) \equiv \perp \vee (p \wedge r \wedge \neg q)$$

$$\equiv p \wedge r \wedge \neg q$$

2

Búsqueda de modelos y forma normal disyuntiva

- Búsqueda de modelo y FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$.

$$I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$$

$$\text{syss } I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\}$$

$$\text{syss } I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$$

$$\text{syss } I \models \{p, q, \neg p \vee \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{p, q, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, q, \neg q\}$$

$$\text{syss } I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{\perp\}$$

- La fórmula $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ no tiene modelos (es insatisficible).
- Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$:

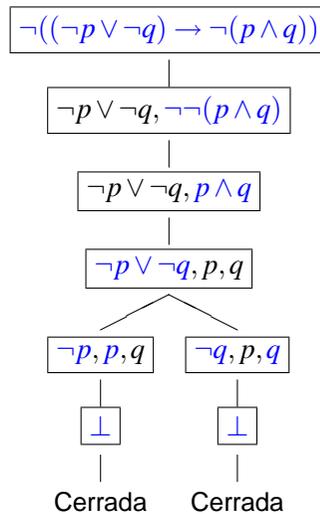
$$\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \equiv \perp \vee \perp$$

$$\equiv \perp$$

4

Búsqueda de modelos y FND por tableros semánticos

- Tablero semántico cerrado:



Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
 - Un **literal** es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
 - $I \models p$ syss $I(p) = 1$.
 - $I \models \neg p$ syss $I(p) = 0$.
- Dobles negaciones
 - F es una **doble negación** si es de la forma $\neg\neg G$.
 - $I \models \neg\neg G$ syss $I \models G$.
- Reducción de modelos:
 - $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
 - $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

5

Notación uniforme: fórmulas alfa y beta

- Las **fórmulas alfa**, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es una fórmula alfa con componentes F_1 y F_2 , entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.

- Las **fórmulas beta**, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es una fórmula beta y con componentes F_1 y F_2 , entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

7

Tablero del conjunto de fórmulas S

Un **tablero** del conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

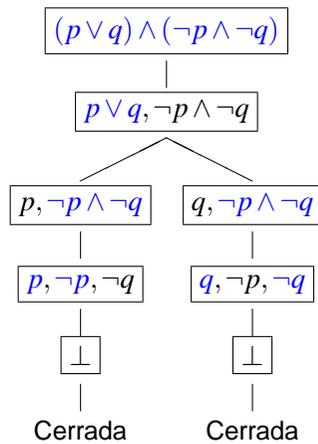
- El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S .
- Sea \mathcal{T} un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de \mathcal{T} .
 - Si S_1 contiene una fórmula y su negación, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $\{\perp\}$ es un tablero de S .
 - Si S_1 contiene una **doble negación** $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S .
 - Si S_1 contiene una **fórmula alfa** F de componentes F_1 y F_2 , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S .
 - Si S_1 contiene una **fórmula beta** F de componentes F_1 y F_2 , entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S .

6

8

No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es



9

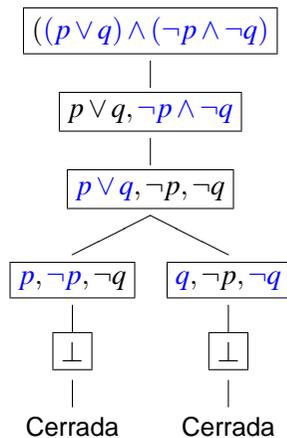
Modelos por tableros

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas, \mathcal{T} un tablero de S .
 - Una hoja de \mathcal{T} es **cerrada** si contiene una fórmula y su negación o es de la forma $\{\perp\}$.
 - Una hoja de \mathcal{T} es **abierta** si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- Def.: Un **tablero completo** de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es **cerrado** si todas sus hojas son cerradas.
- Reducción de modelos:
 - $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
 - $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
- Prop.: Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$, entonces $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \equiv (G_{1,1} \wedge \dots \wedge G_{1,n_1}) \vee \dots \vee (G_{m,1} \wedge \dots \wedge G_{m,n_m})$.
- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas, \mathcal{T} un tablero de S e I una interpretación. Entonces, $I \models S$ syss existe una hoja S_1 de \mathcal{T} tal que $I \models S_1$.

11

No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Otro tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es



10

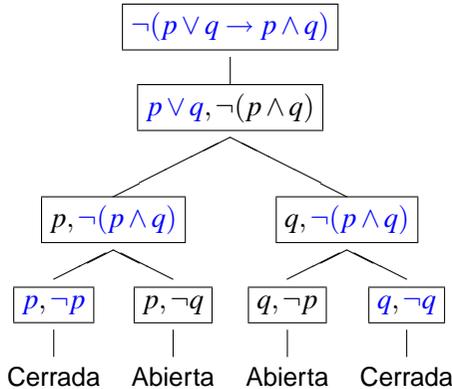
Consistencia mediante tableros

- Prop.: Si $\{p_1, \dots, p_n, \neg q_1, \dots, \neg q_m\}$ es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas S , entonces la interpretación I tal que $I(p_1) = 1, \dots, I(p_n) = 1, I(q_1) = 0, \dots, I(q_m) = 0$ es un modelo de S .
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es consistente syss S tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es inconsistente syss S tiene un tablero completo cerrado.

12

Forma normal disyuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$.
- Ejemplo: Forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$.



Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ es $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

13

Forma normal conjuntiva por tableros

- El **complementario** de un literal L es

$$L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$$
- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal conjuntiva de F es $(L_{1,1}^c \vee \dots \vee L_{1,n_1}^c) \wedge \dots \wedge (L_{m,1}^c \vee \dots \vee L_{m,n_m}^c)$.
- Ejemplo: Forma normal conjuntiva de $p \vee q \rightarrow p \wedge q$.
 - ▶ Un árbol completo $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ está en la transparencia anterior.
 - ▶ Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ es $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.
 - ▶ Una forma normal conjuntiva de $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

$$\begin{aligned} p \vee q \rightarrow p \wedge q &\equiv \neg \neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q) \\ &\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\ &\equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg \neg p) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \end{aligned}$$

14

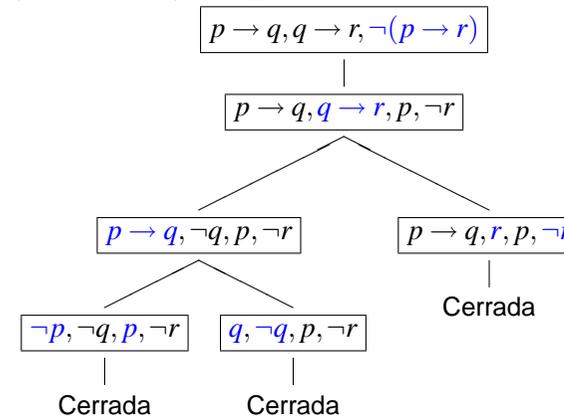
Teorema por tableros

- Def.: Una fórmula F es un **teorema** (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado. Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$
 $\not\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,
 - Adecuado:** $\vdash_{Tab} F \Rightarrow \models F$
 - Completo:** $\models F \Rightarrow \vdash_{Tab} F$

15

Deducción por tableros

- Def.: La fórmula F es **deducible** (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{F\}$. Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$

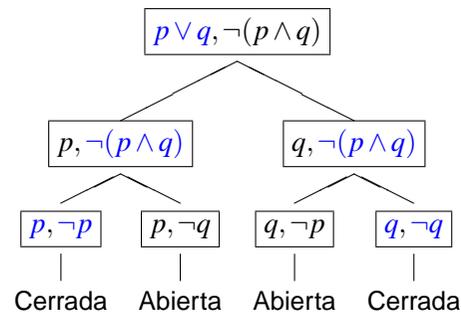


- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ si y solo si $S \models F$.

16

Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$



- Contramodelos de $\{p \vee q\} \not\vdash_{Tab} p \wedge q$

las interpretaciones I_1 tales que $I_1(p) = 1$ e $I_1(q) = 0$

las interpretaciones I_2 tales que $I_2(p) = 0$ e $I_2(q) = 1$

17

Bibliografía

- Ben-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
Cap. 3: Semantic tableaux and resolution
- Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)
Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones
- Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)
Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas

18