Ejercicio 4.1 Calcular, mediante tableros semánticos, los modelos y una forma normal disyuntiva de las siguientes fórmulas

- [T] $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$.
- [T] $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$.

Ejercicio 4.2 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. [T] $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
2. [T] $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
3. $F \wedge G$ es satisfacible syss F es satisfacible y G es satisfacible.
4. $F \vee G$ es satisfacible syss F es satisfacible o G es satisfacible.
5. $F \wedge G$ es válida syss F es válida y G es válida.
6. $F \vee G$ es válida syss F es válida ó G es válida.

Ejercicio 4.3 Demostrar por deducción natural las equivalencias de la notación uniforme:

1. $\neg\neg F \equiv F$.
2. $\neg(A_1 \rightarrow A_2) \equiv A_1 \wedge \neg A_2$.
3. $\neg(A_1 \vee A_2) \equiv \neg A_1 \wedge \neg A_2$.
4. $A_1 \leftrightarrow A_2 \equiv (A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1)$.
5. $B_1 \rightarrow B_2 \equiv \neg B_1 \vee B_2$.
6. $\neg(B_1 \wedge B_2) \equiv \neg B_1 \vee \neg B_2$.
7. $\neg(B_1 \leftrightarrow B_2) \equiv \neg(B_1 \rightarrow B_2) \vee \neg(B_2 \rightarrow B_1)$.

Ejercicio 4.4 [T] Construir dos tableros completos distintos de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$

Ejercicio 4.5 [T] Calcular, mediante tableros semánticos,

1. una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$.
2. una forma normal conjuntiva $p \vee q \rightarrow p \wedge q$.

Ejercicio 4.6 Decidir si

1. [T] $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$.
2. [T] $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$.
3. [T] $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$.
4. [T] $\{p \vee q\} \vdash_{Tab} p \wedge q$.

Ejercicio 4.7 Sea A la fórmula proposicional $p \wedge q \leftrightarrow \neg p \vee r$.

1. Escribir un tablero completo para A y otro para $\neg A$.
2. Describir todos los modelos y todos los contramodelos de la fórmula A .
3. Calcular una FNC y una FND de A .

Ejercicio 4.8 Decidir, mediante tableros semánticos, si:

1. $(p \rightarrow q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ es una tautología.
2. $\{p \rightarrow (q \leftrightarrow r), r\} \models r \rightarrow (p \wedge q)$.
3. $\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg q \equiv p \vee q \rightarrow r \vee s$.

Ejercicio 4.9 Demostrar, mediante tableros semánticos, la corrección del siguiente argumento:

Se sabe que

1. *Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.*
2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*
3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*

4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 4.10 Demostrar, mediante tableros semánticos, la corrección de los siguientes argumentos.

1. Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.
2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen constantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
3. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 4.11 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar mediante tableros semánticos que la dama está en la segunda puerta.

Ejercicio 4.12 [Examen de diciembre de 2000] Probar, usando tableros semánticos, que la fórmula

$$(p \rightarrow \neg q \wedge r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

es una tautología.

Ejercicio 4.13 [Examen de junio de 2001] Decidir, usando tableros semánticos, si la fórmula

$$(p \wedge q \leftrightarrow p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

es insatisfactible o una tautología.

Ejercicio 4.14 [Examen de junio de 2001] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{p \vee q \rightarrow r \vee s, r \wedge t \rightarrow s, r \wedge \neg t \rightarrow \neg u\} \models p \rightarrow s \vee \neg u$$

Ejercicio 4.15 [Examen de septiembre de 2001] Probar, mediante tableros semánticos, que la fórmula

$$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$$

es una tautología.

Ejercicio 4.16 [Examen de diciembre de 2001] Demostrar por el método de tableros semánticos que

$$(p \vee q \leftrightarrow \neg r) \wedge (\neg p \rightarrow s) \wedge (\neg t \rightarrow q) \wedge (s \wedge t \rightarrow u) \models r \rightarrow u$$

Ejercicio 4.17 [Examen de junio de 2002] Probar, mediante tableros semánticos, que

$$(r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow q \vee s) \rightarrow p \vee q \vee s$$

es una tautología.

Ejercicio 4.18 [Examen de septiembre de 2002] Sean $A : \neg r \rightarrow s \wedge \neg u$ y $B : (r \vee s) \wedge (u \rightarrow r)$. Probar, mediante tableros semánticos que A y B son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 4.19 [Examen de junio de 2003] Se considera el conjunto de fórmulas

$$S = \{p \rightarrow q, q \leftrightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q\}$$

1. Probar, mediante tableros semánticos, que S es consistente.
2. Obtener todos los modelos de S .

Ejercicio 4.20 [Examen de septiembre de 2003] Dadas las fórmulas

$$A : (s \rightarrow p) \vee (t \rightarrow q) \text{ y}$$

$$B : (s \rightarrow q) \vee (t \rightarrow p),$$

se pide

1. Probar que $A \models B$, mediante tableros semánticos.
2. Describir, razonadamente, todos los modelos de A y, a continuación, probar nuevamente que $A \models B$, utilizando la definición de consecuencia lógica.

Ejercicio 4.21 [Examen de diciembre de 2003] Probar mediante un tablero semántico que

$$(p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow \neg t) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow \neg t)$$

es una tautología.

Ejercicio 4.22 [Examen de junio de 2004] Este ejercicio tiene tres apartados.

1. Probar $E \rightarrow (F \rightarrow G) \not\models (E \rightarrow F) \rightarrow G$ mediante tableros semánticos.
2. Describir todos los modelos de $E \rightarrow (F \rightarrow G)$ que no son modelos de $(E \rightarrow F) \rightarrow G$.
3. La fórmula $E \rightarrow (F \rightarrow G) \rightarrow (E \rightarrow F) \rightarrow G$, ¿es una tautología? Razonar la respuesta.

Ejercicio 4.23 [Examen de septiembre de 2004] En un texto de Lewis Carroll, el tío Jorge y el tío Jaime discuten acerca de la barbería del pueblo, atendida por tres barberos: Alberto, Benito y Carlos. Los dos tíos aceptan las siguientes premisas:

1. Si Carlos no está en la barbería, entonces ocurrirá que si tampoco está Alberto, Benito tendrá que estar para atender el establecimiento.
2. Si Alberto no está, tampoco estará Benito.

El tío Jorge concluye de todo esto que Carlos no puede estar ausente, mientras que el tío Jaime afirma que sólo puede concluirse que Carlos y Alberto no pueden estar ausentes a la vez. Decidir con el método de los tableros semánticos cuál de los dos tiene razón.

Ejercicio 4.24 [Examen de septiembre de 2004] Probar que la fórmula

$$(E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$$

es una tautología por tableros semánticos.

Ejercicio 4.25 [Examen de abril de 2005] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$\{p \rightarrow r, q \rightarrow r\} \models p \vee q \rightarrow r$$

Ejercicio 4.26 [Examen de abril de 2005] Decidir, mediante tableros semánticos, si

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \models p \rightarrow (q \wedge r).$$

Ejercicio 4.27 [Examen de junio de 2005] Decidir, mediante tablero semántico, si

$$\{\neg p \rightarrow (q \wedge r)\} \models q \rightarrow p$$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 4.28 [Examen de septiembre de 2005] Decidir, mediante tablero semántico, si

1. $\{r \rightarrow \neg(p \wedge \neg q), ((p \rightarrow r) \rightarrow (\neg q \leftrightarrow r)) \wedge \neg r\} \models q$
2. $\models ((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)$

En el caso de que no se verifique, obtener un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 4.29 [Examen de diciembre de 2005] Mediante tableros semánticos, determinar cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías y calcular una forma normal conjuntiva de las que no lo sean.

1. $((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$
2. $((\neg p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow ((\neg p \vee \neg q) \rightarrow r)$

Ejercicio 4.30 [Examen de abril de 2006] Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula

$$p \wedge (q \vee s) \rightarrow (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, construir un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 4.31 [Examen de abril de 2006] Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg q)$$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos y una forma normal disyuntiva.

Ejercicio 4.32 [Examen de junio de 2006] Sea F la fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(q \vee r) \wedge \neg p$.

1. Decidir, mediante tablero semántico, si F es una tautología.
2. Si F no es una tautología, calcular, a partir de su tablero semántico, los contramodelos de F , una forma normal disyuntiva de $\neg F$ y una forma normal conjuntiva de F .

Ejercicio 4.33 [Examen de junio de 2006] Demostrar o refutar la siguiente proposición:

Si S es un conjunto inconsistente de fórmulas, entonces el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas α antes que las reglas β tiene menos nodos que el tablero semántico cerrado de S obtenido aplicando las reglas β antes que las reglas α .

Ejercicio 4.34 [Examen de septiembre de 2006] Sea F la fórmula

$$((p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)) \vee (((\neg p \vee q) \rightarrow \neg((q \wedge r) \rightarrow \neg p)) \wedge (r \rightarrow \neg(q \vee p)))$$

Decidir, mediante tablero semántico, si F es satisfacible. En el caso de que lo sea, calcular un modelo v de F a partir del tablero y comprobar que v es modelo de F .