Lógica informática (2006–07)

Tema 4: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez

María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Búsqueda de modelos y forma normal disyuntiva

- Búsqueda de modelo y FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$

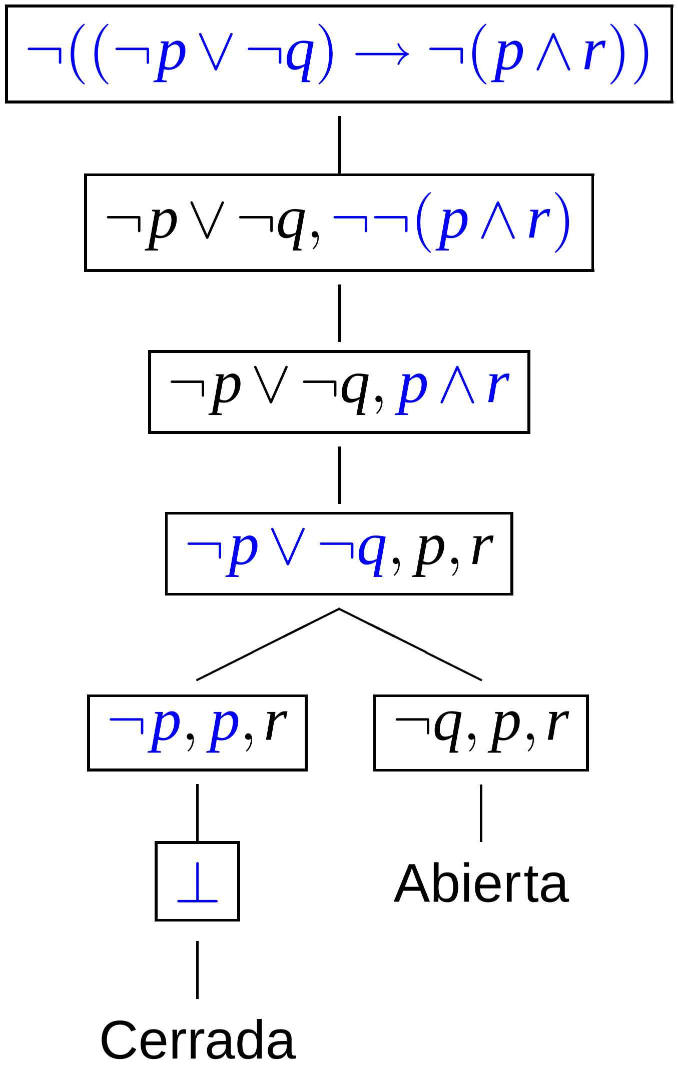
$$
\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge r)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p \vee \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}
\end{array}
$$

  - Modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:
    Las interpretaciones I tales que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.
  - Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r))$:

$$
\begin{aligned}
\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)) &\equiv \perp \vee (p \wedge r \wedge \neg q) \\
&\equiv p \wedge r \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

Búsqueda de modelos y FND por tableros semánticos

- Tablero semántico:



Búsqueda de modelos y forma normal disyuntiva

- Búsqueda de modelo y FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$.

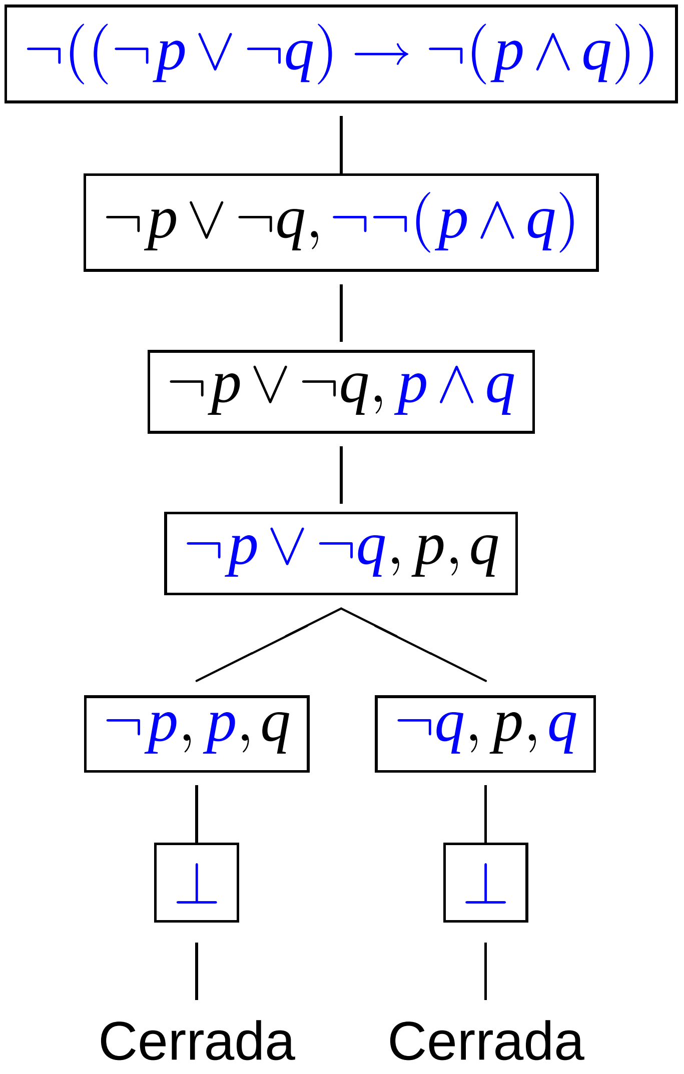
$$
\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p \vee \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, q, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\bot\} \text{ ó } I \models \{\bot\}
\end{array}
$$

  - La fórmula $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ no tiene modelos (es insatisfacible).
  - Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$:

$$
\begin{aligned}
\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)) &\equiv \bot \vee \bot \\
&\equiv \bot
\end{aligned}
$$

Búsqueda de modelos y FND por tableros semánticos

- Tablero semántico cerrado:



Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \ldots$).
  - $I \models p$ syss $I(p) = 1$.
  - $I \models \neg p$ syss $I(p) = 0$.
- Dobles negaciones
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - $I \models \neg\neg G$ syss $I \models G$.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

Notación uniforme: fórmulas alfa y beta

- Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es una fórmula alfa con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.
- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es una fórmula beta y con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

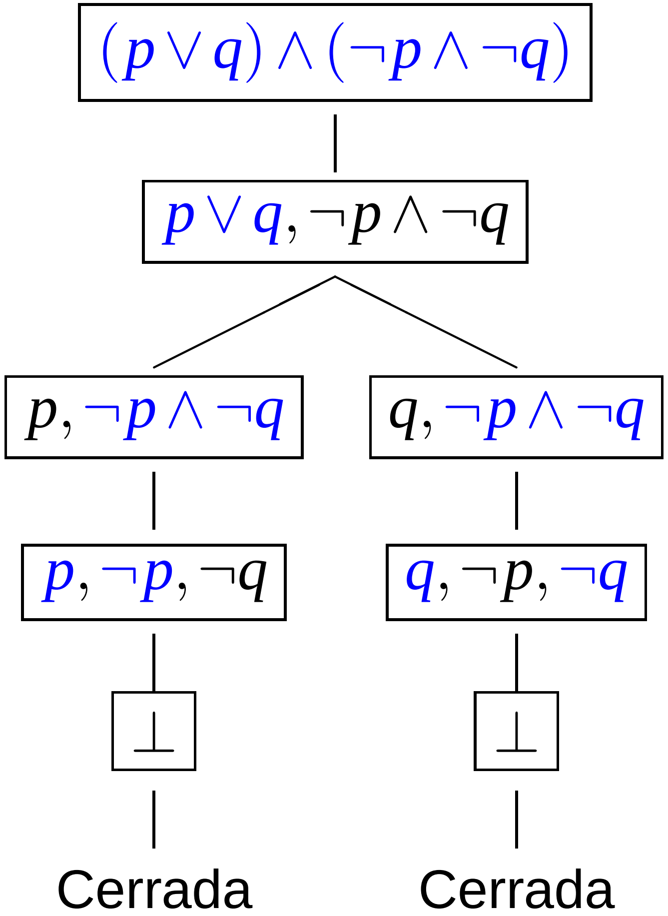
Tablero del conjunto de fórmulas S

Un tablero del conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

- El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
- Sea $\mathscr{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathscr{T}$.
  1. Si S_1 contiene una fórmula y su negación, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $\{\perp\}$ es un tablero de S.
  2. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
  3. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
  4. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es



No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Otro tablero completo de $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$ es

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boxed{((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q))} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{p \vee q, \neg p \wedge \neg q} \arrow[d, dash] & \\
& \boxed{p \vee q, \neg p, \neg q} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\boxed{p, \neg p, \neg q} \arrow[d, dash] & & \boxed{q, \neg p, \neg q} \arrow[d, dash] \\
\boxed{\perp} \arrow[d, dash] & & \boxed{\perp} \arrow[d, dash] \\
\text{Cerrada} & & \text{Cerrada}
\end{tikzcd}
$$

Modelos por tableros

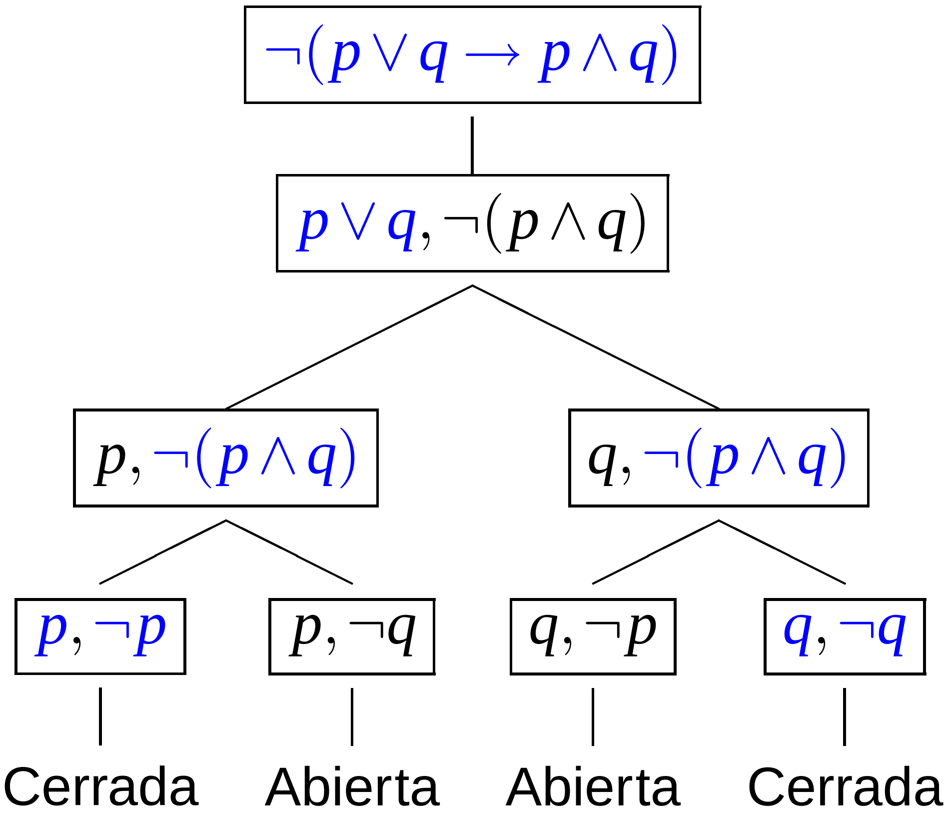
- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathscr{T}$ un tablero de S.
  - Una hoja de $\mathscr{T}$ es cerrada si contiene una fórmula y su negación o es de la forma $\{\perp\}$.
  - Una hoja de $\mathscr{T}$ es abierta si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas son cerradas.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
- Prop.: Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$, entonces $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \equiv (G_{1,1} \wedge \cdots \wedge G_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (G_{m,1} \wedge \cdots \wedge G_{m,n_m})$.
- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathscr{T}$ un tablero de S e I una interpretación. Entonces, $I \models S$ syss existe una hoja S_1 de $\mathscr{T}$ tal que $I \models S_1$.

Consistencia mediante tableros

- Prop.: Si $\{p_1, \ldots, p_n, \neg q_1, \ldots, \neg q_m\}$ es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas S, entonces la interpretación I tal que $I(p_1) = 1, \ldots, I(p_n) = 1$, $I(q_1) = 0, \ldots, I(q_m) = 0$ es un modelo de S.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es consistente syss S tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es inconsistente syss S tiene un tablero completo cerrado.

Forma normal disyuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{F\}$ son $\{L_{1,1},\dots,L_{1,n_1}\},\dots,\{L_{m,1},\dots,L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1}\land\cdots\land L_{1,n_1})\lor\cdots\lor(L_{m,1}\land\cdots\land L_{m,n_m})$.
- Ejemplo: Forma normal disyuntiva de $\neg(p\lor q\to p\land q)$.



Una forma normal disyuntiva de $\neg(p\lor q\to p\land q)$ es $(p\land\neg q)\lor(q\land\neg p)$.

Forma normal conjuntiva por tableros

- El complementario de un literal L es
$$L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$$
- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{\neg F\}$ son $\{L_{1,1},\dots,L_{1,n_1}\},\dots,\{L_{m,1},\dots,L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal conjuntiva de F es $(L^c_{1,1} \vee \dots \vee L^c_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L^c_{m,1} \vee \dots \vee L^c_{m,n_m})$.
- Ejemplo: Forma normal conjuntiva de $p \vee q \to p \wedge q$.
  - Un árbol completo $\neg(p \vee q \to p \wedge q)$ está en la transparencia anterior.
  - Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \to p \wedge q)$ es $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.
  - Una forma normal conjuntiva de $p \vee q \to p \wedge q$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

$$\begin{aligned} p \vee q \to p \wedge q &\equiv \neg\neg(p \vee q \to p \wedge q) \\ &\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\ &\equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)) \\ &\equiv (\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg q \vee \neg\neg p)) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \end{aligned}$$

Teorema por tableros

- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado. Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

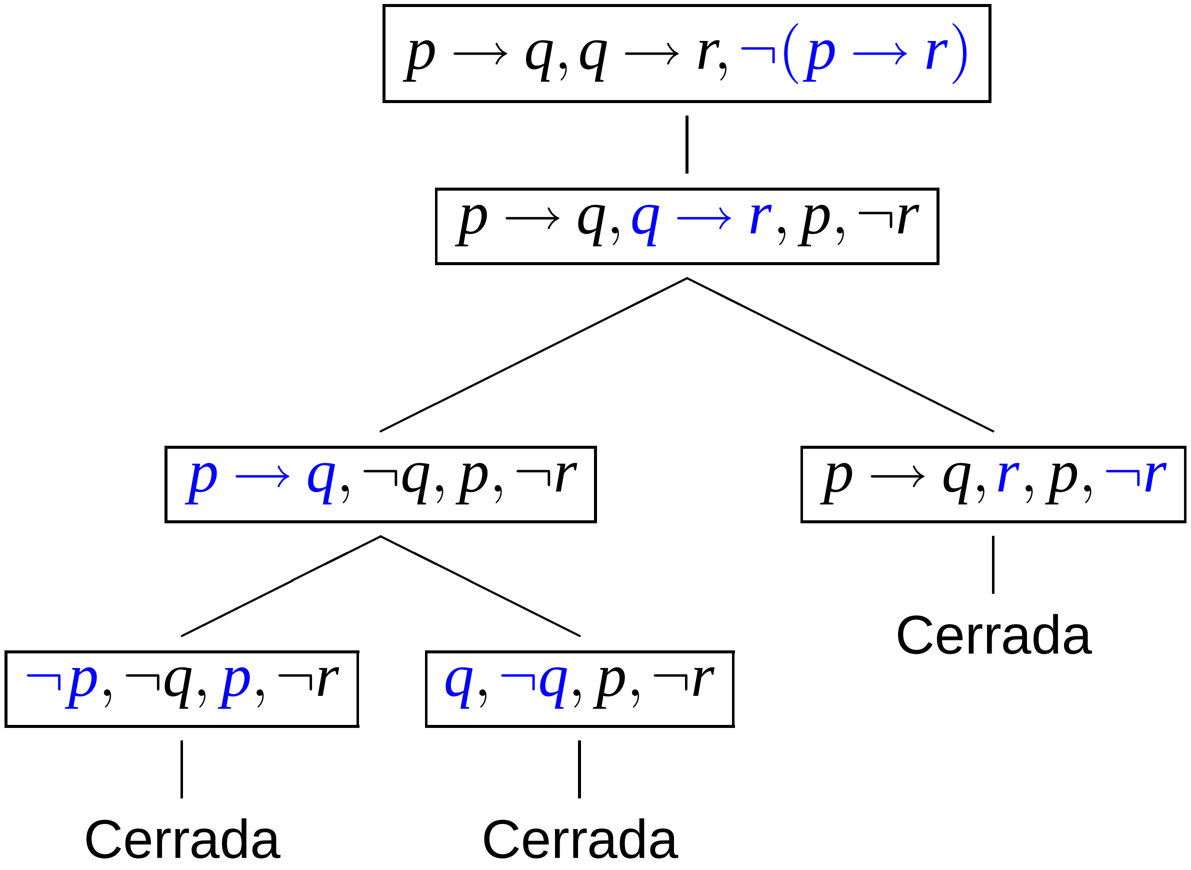
  $\not\vdash_{Tab} \neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,

  Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Rightarrow \quad \models F$

  Completo: $\models F \quad \Rightarrow \quad \vdash_{Tab} F$

Deducción por tableros

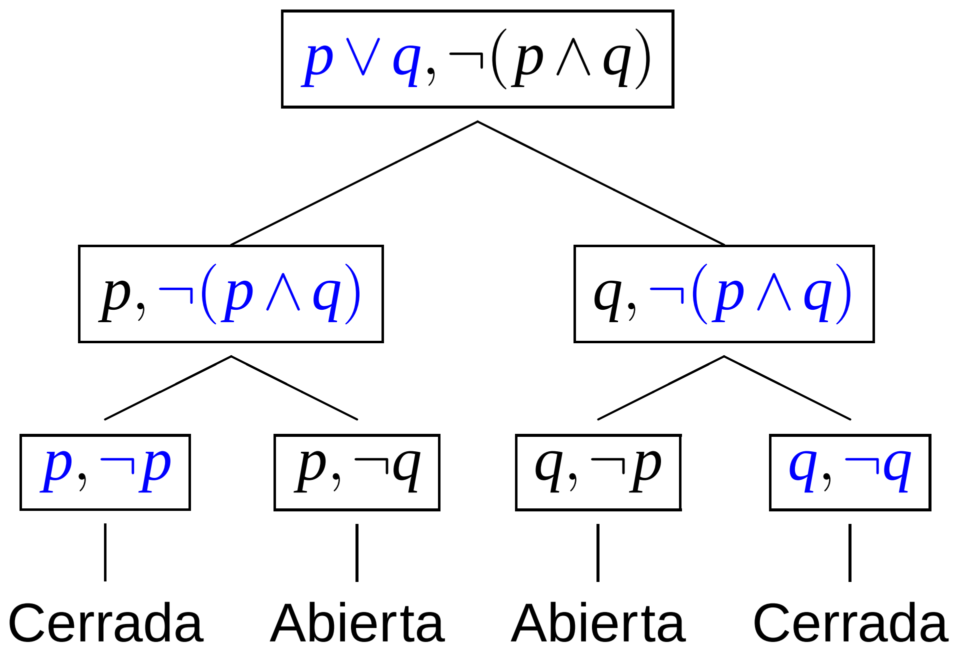
- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$. Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \vee q\} \nvdash_{Tab} p \wedge q$



- Contramodelos de $\{p \vee q\} \nvdash_{Tab} p \wedge q$

  las interpretaciones I_1 tales que $I_1(p) = 1$ e $I_1(q) = 0$

  las interpretaciones I_2 tales que $I_2(p) = 0$ e $I_2(q) = 1$

Bibliografía

1. Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

   Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux

2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)

   Cap. 3: Semantic tableaux and resolution

3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

   Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones

4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

   Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas