Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1 [T] Demostrar las siguientes proposiciones:

- En cualquier interpretación I, $I(\square) = 0$.
- La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \lor L_2 \lor \dots \lor L_n$.
- El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \lor \dots \lor L_{1,n_1}) \land \dots \land (L_{m,1} \lor \dots \lor L_{m,n_m})$.
- Si $(L_{1,1} \lor \dots \lor L_{1,n_1}) \land \dots \land (L_{m,1} \lor \dots \lor L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$.

Ejercicio 5.2 [T] Calcular una forma clausal de las siguientes fórmulas:

1. $\neg(p \land (q \to r))$.
2. $p \to q$.
3. $(p \to q) \land r$.
4. $\neg\neg r \land (\neg q \to \neg p)$.

Ejercicio 5.3 [T] Demostrar o refutar: Si dos fórmulas son distintas, sus formas clausales son distintas.

Ejercicio 5.4 [T] Demostrar que si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.

Ejercicio 5.5 [T] Decidir si la interpretación I tal que $I(p) = I(q) = 1$ es un modelo del conjunto de cláusulas $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.6 [T] Decidir si los siguientes conjuntos de cláusulas son consistentes:

1. $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
2. $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.7 [T] Demostrar que si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.

Ejercicio 5.8 [T] Demostrar que $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.

Ejercicio 5.9 [T] Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Demostrar que son equivalentes

1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
2. $\{F_1, \dots, F_n \neg G\}$ es inconsistente.
3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.

Ejercicio 5.10 [T] Calcular:

1. $\text{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\})$.
2. $\text{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\})$.
3. $\text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\})$.
4. $\text{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\})$.
5. $\text{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\})$.
6. $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\})$.

7. $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\})$.
8. $\text{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\})$.

¿Pertenece $\square$ a $\text{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$?

Ejercicio 5.11 **[T]** Construir una refutación por resolución del conjunto de cláusulas
$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.12 **[T]** Demostrar por resolución la fórmula $p \wedge q$ a partir del conjunto de fórmulas $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\}$.

Ejercicio 5.13 **[T]** Demostrar las siguientes proposiciones:

1. Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
2. Si el conjunto de cláusulas S es refutable, entonces S es inconsistente.
3. Si S es un conjunto de fórmulas y F es una fórmula tal que $S \vdash_{Res} F$, entonces $S \models F$.

Ejercicio 5.14 **[T]**

1. Encontrar dos cláusulas C_1 y C_2 tales que $\{C_1\} \models C_2$ pero C_2 no es demostrable por resolución a partir de $\{C_1\}$.
2. Demostrar que si F_1 y F_2 son dos fórmulas cuyas formas clausales son C_1 y C_2, respectivamente, entonces $\{F_1\} \vdash_{Res} F_2$.

Ejercicio 5.15 **[T]** Construir el grafo de resolución por saturación de
$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.16 **[T]** Construir el grafo de resolución por saturación simplificada de los siguientes conjuntos y, a partir del grafo, hallar una refutación o un modelo del conjunto.

1. $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.
2. $\{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}\}$.

Ejercicio 5.17 **[T]** Contruir un grafo de resolución positiva del conjunto
$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.18 **[T]** Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si S es un conjunto de cláusulas inconsistente, entonces existe una refutación de S mediante resolución unitaria.
2. Si S es un conjunto de cláusulas inconsistente, entonces existe una refutación de S mediante resolución por entradas.

Ejercicio 5.19 **[T]** Decidir mediante resolución lineal si el siguiente conjunto es consistente
$\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$.

Ejercicio 5.20 **[T]** Demostrar, mediante resolución lineal, la corrección del siguiente argumento:
Se sabe que

1. *Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.*
2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*
3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*
4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.21 Indicar en cuáles de los siguientes ejemplos se ha aplicado correctamente la regla de resolución proposicional y en cuáles no. En este último caso, escribir las resolventes correctas.

1. $\{p,q,r,s\}$ es una resolvente de $\{p,q,r\}$ y $\{p,q,s\}$.
2. $\{p\}$ es una resolvente de $\{p,q\}$ y $\{p,\neg q\}$.
3. $\square$ es una resolvente de $\{p,\neg q\}$ y $\{\neg p,q\}$.
4. $\{r,\neg r\}$ es una resolvente de $\{r,\neg r\}$ y $\{r,\neg r\}$.

Ejercicio 5.22 Usando resolución proposicional (traduciendo previamente las fórmulas a conjuntos de cláusulas), demostrar que:

1. $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \land (p \leftrightarrow q) \land (p \rightarrow \neg r)$ es una contradicción.
2. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p \land r\} \models p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$.

Ejercicio 5.23 Usando resolución proposicional, determinar si:

1. $\{p \lor q \lor r, \neg p \lor q, \neg q \lor r, \neg r, p \lor r\}$ es consistente.
2. $\{p \lor q, \neg p \lor \neg q, p \lor \neg q, \neg p \lor q \lor r, \neg r \lor s\}$ es consistente.
3. $\{\neg p \lor \neg q \lor r, p \lor r, q \lor r\} \models r$.

Ejercicio 5.24 Ash, Misty y Brock han organizado una batalla entre sus Pokemon. Se conocen los siguientes datos al respecto:

(a) Uno, y sólo uno, de los siguientes Pokemon fue el vencedor: Pikachu, Bulbasaur, Togepi, Starmie, Vulpix y Onix.
(b) Ash ganó la batalla si el Pokemon vencedor fue Pikachu o Bulbasaur.
(c) Si o bien Togepi o bien Starmie fue el vencedor, Misty ganó la batalla.
(d) Brock ganó la batalla si el vencedor fue Onix o Vulpix.
(e) Si Onix fue derrotado, Starmie también.
(f) Bulbasaur fue derrotado.
(g) Si Pikachu fue derrotado, entonces Ash no ganó la batalla.
(h) Brock no ganó la batalla si Bulbasaur fue derrotado.
(i) Si Vulpix fue derrotado, Togepi y Onix también corrieron la misma suerte.

Se pide:

1. Formalizar los datos anteriores en el lenguaje de la lógica proposicional.
2. Para cada fórmula obtenida, escribir un conjunto de cláusulas equivalente.
3. Usando resolución proposicional, demostrar que Ash fue el ganador.

Ejercicio 5.25 Probar, mediante resolución lineal, que

$$\{r \leftrightarrow p \lor q, s \rightarrow p, \neg s \land \neg r \rightarrow s \lor t\} \models \neg p \rightarrow (q \lor t).$$

Ejercicio 5.26 Dados los conjuntos de fórmulas:

$$S = \{p \rightarrow q, q \leftrightarrow r \land s, \neg s \land r \rightarrow q, \neg q\}$$
$$T = \{q \lor r, \neg q \lor \neg r\}$$

Probar, mediante resolución lineal, que $S \cup T$ es inconsistente.

Ejercicio 5.27 Demostrar, mediante resolución, la corrección de los siguientes argumentos.

1. Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.
2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.
3. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 5.28 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar mediante resolución que la dama está en la segunda puerta.

Ejercicios de exámenes

Ejercicio 5.29 [Examen de diciembre de 2000] Sea $U = \{\neg A_1 \vee \neg B_1 \vee C_2, \neg A_1 \vee B_1, \neg A_2 \vee B_2, A_1, A_2\}$. Probar, mediante resolución lineal, que $U \models C_2$.

Ejercicio 5.30 [Examen de junio de 2001] Decidir, mediante resolución, si la siguiente fórmula es una tautología $(q \rightarrow p \wedge r) \wedge \neg(p \leftrightarrow p \vee q)$

Ejercicio 5.31 [Examen de septiembre de 2001] Probar, por resolución, que la siguiente fórmula es una tautología: $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Ejercicio 5.32 [Examen de diciembre de 2001] Probar por resolución que

$$\{p \vee q \leftrightarrow \neg r, \neg p \rightarrow s, \neg t \rightarrow q, s \wedge t \rightarrow u\} \models r \rightarrow u.$$

Ejercicio 5.33 [Examen de septiembre de 2002] Probar, mediante resolución lineal, que la fórmula

$$\neg r \rightarrow s \wedge \neg u$$

es consecuencia lógica de

$$U = \{q \vee r \vee s, r \rightarrow q \vee t, q \rightarrow \neg p, t \rightarrow u, u \rightarrow \neg s, p\}.$$

Ejercicio 5.34 [Examen de septiembre de 2003] Probar, mediante resolución por entradas, que

$$(s \rightarrow p) \vee (t \rightarrow q) \models (s \rightarrow q) \vee (t \rightarrow p).$$

Ejercicio 5.35 [Examen de diciembre de 2003] Sean F y G las siguientes fórmulas:

$F : (p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow \neg t) \wedge (q \rightarrow r))$

$G : \neg(\neg t \leftrightarrow (\neg t \wedge p)) \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg t)$

Probar, mediante resolución, que $\{F,G\} \models r \rightarrow p$.

Ejercicio 5.36 [Examen de junio de 2004] Probar, por resolución, que

$(E \vee F) \rightarrow G \models (E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)$

Ejercicio 5.37 [Examen de septiembre de 2004] Probar, por resolución, la inconsistencia del conjunto

$\{\neg E \rightarrow F \vee G,\ E \rightarrow F \vee G,\ G \rightarrow F,\ F \rightarrow E,\ E \rightarrow \neg F\}$

Ejercicio 5.38 [Examen de Abril de 2006] Decidir, mediante resolución, si

$\{C \rightarrow A, G \rightarrow D, \neg(B \wedge C \wedge G \rightarrow E)\} \models A \wedge B \wedge D.$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 5.39 [Examen de aabril de 2006] Juan está matriculado en tres asignaturas, Álgebra, Lógica y Dibujo. Juan comenta que

> *Me gusta al menos una de las tres asignaturas. Si me gustase el Álgebra pero no el Dibujo, me gustaría la Lógica. O me gusta el Dibujo y la Lógica, o bien ninguna de las dos. Si me gustase el Dibujo, entonces me gustaría el Álgebra.*

Los comentarios de Juan pueden formalizarse por

$\{A \vee D \vee L, (A \wedge \neg D) \rightarrow L, (D \wedge L) \vee (\neg D \wedge \neg L), D \rightarrow A\}$

Decidir, mediante resolución, si los comentarios de Juan son consistentes y, en su caso, calcular sus modelos a partir de la resolución. ¿Qué asignaturas le gustan a Juan?

Ejercicio 5.40 [Examen de abril de 2006] Decidir, mediante resolución, si

$\{p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, q \vee r \rightarrow s\} \models s.$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.

Ejercicio 5.41 [Examen de Abril de 2006] Decidir, mediante resolución, si r es consecuencia lógica de

$\{p \leftrightarrow q, \neg p \rightarrow r, \neg s \wedge \neg t \rightarrow q, \neg s \wedge t\}.$

En el caso que no lo sea, construir un contramodelo a partir de la resolución.