Lógica informática (2006–07)

Tema 6: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

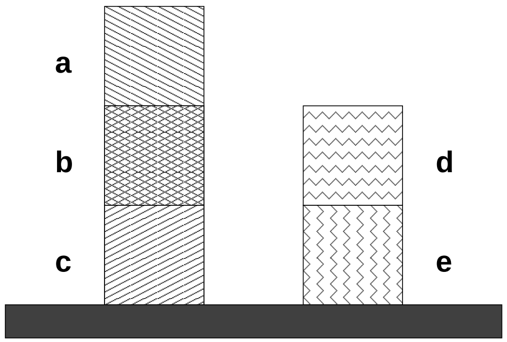
Grupo de Lógica Computacional
Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Ejemplo 1: *Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional:
    $\{SvC \to CvS, \quad SvC\} \models CvS$
- Ejemplo 2: *Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla*
  - Representación en lógica proposicional: Imposible
  - Representación en lógica de primer orden:
    $\{\forall x\ \forall y\ [vecina(x,y) \to vecina(y,x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\}$
    $\models vecina(Cadiz, Sevilla)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

Mundo de los bloques



- Simbolización:
  - $\text{sobre}(x,y)$ se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
  - $\text{sobre\_mesa}(x)$ se verifica si el bloque x está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:
  $\text{sobre}(a,b), \text{sobre}(b,c), \text{sobre\_mesa}(c), \text{sobre}(d,e), \text{sobre\_mesa}(e)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Definiciones:
  - $\text{bajo}(x,y)$ se verifica si el bloque x está debajo del bloque y
    $\forall x\ \forall y\ [\text{bajo}(x,y) \leftrightarrow \text{sobre}(y,x)]$
  - $\text{encima}(x,y)$ se verifica si el bloque x está encima del bloque y pudiendo haber otros bloques entre ellos
    $\forall x\ \forall y\ [\text{encima}(x,y) \leftrightarrow \text{sobre}(x,y) \lor \exists z\ [\text{sobre}(x,z) \land \text{encima}(z,y)]]$
  - $\text{libre}(x)$ se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\ [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \text{sobre}(y,x)]$
  - $\text{pila}(x,y,z)$ se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa
    $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\text{pila}(x,y,z) \leftrightarrow \text{sobre}(x,y) \land \text{sobre}(y,z) \land \text{sobre\_mesa}(z)]$
- Propiedades:
  - Si z,y,z es una pila entonces y no está libre
    $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\text{pila}(x,y,z) \to \neg\,\text{libre}(y)]$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

Representación del mundo de los bloques con funciones e igualdad:

- Simbolización:
  - $\text{es\_bloque}(x)$ se verifica si x es un bloque.
  - $\text{superior}(x)$ es el bloque que está sobre el bloque x.
- Situación del ejemplo:

  $\text{es\_bloque}(a), \text{es\_bloque}(b), \text{es\_bloque}(c), \text{es\_bloque}(d), \text{es\_bloque}(e)$
  $\text{superior}(b) = a, \text{superior}(c) = b, \text{superior}(e) = d$
- Definiciones:
  - $\text{sobre\_mesa}(x)$ se verifica si el bloque x está sobre la mesa
    $\forall x\, [\text{sobre\_mesa}(x) \leftrightarrow \text{es\_bloque}(x) \land \neg\exists y\ \text{superior}(y) = x]$
  - $\text{libre}(x)$ se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
    $\forall x\, [\text{libre}(x) \leftrightarrow \neg\exists y\ \text{superior}(x) = y]$
  - $\text{tope}(x)$ es el bloque libre que está encima de x

$$\begin{aligned}\forall x\, [\ & (\text{libre}(x) \to \text{tope}(x) = x) \land \\ & (\neg\text{libre}(x) \to \text{tope}(x) = \text{tope}(\text{superior}(x)))]\end{aligned}$$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Ejemplos de formalización:
  - *La Tierra es un planeta:* $\text{planeta}(\text{Tierra})$
  - *La Luna no es un planeta:* $\neg\text{planeta}(\text{Luna})$
  - *La Luna es un satélite:* $\text{satélite}(\text{Luna})$
  - *La Tierra gira alrededor del Sol:* $\text{gira}(\text{Tierra}, \text{Sol})$
  - *Todo planeta es un satélite:* $\forall x\, [\text{planeta}(x) \to \text{satélite}(x)]$
  - *Todo planeta gira alrededor del Sol:* $\forall x\, [\text{planeta}(x) \to \text{gira}(x, \text{Sol})]$
  - *Algún planeta gira alrededor de la Luna:* $\exists x\, [\text{planeta}(x) \land \text{gira}(x, \text{Luna})]$
  - *Hay por lo menos un satélite:* $\exists x\ \text{satélite}(x)$
  - *Ningún planeta es un satélite:* $\neg\exists x\, [\text{planeta}(x) \land \text{satélite}(x)]$
  - *Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:* $\neg\exists x\ \text{gira}(x, x)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Ejemplos de formalización:
  - *Alrededor de los satélites no giran objetos:* $\forall x\, [\text{satélite}(x) \to \neg\exists y\ \text{gira}(y, x)]$
  - *Hay exactamente un satélite:* $\exists x\, [\text{satélite}(x) \land \forall y\, [\text{satélite}(y) \to x = y]]$
  - *La Luna es un satélite de la Tierra:* $\text{satélite}(\text{Luna}, \text{Tierra})$
    [Notar la sobrecarga de la relación satélite]
  - *Todo planeta tiene un satélite:* $\forall x\, [\text{planeta}(x) \to \exists y\ \text{satélite}(y, x)]$
  - *La Tierra no tiene satélites:* $\neg\exists x\ \text{satélite}(x, \text{Tierra})$
  - *Algún planeta no tiene satélites:* $\exists x\, [\text{planeta}(x) \land \neg\exists y\ \text{satélite}(y, x)]$
  - *Sólo los planetas tienen satélites:* $\forall x\, [\exists y\ \text{satélite}(y, x) \to \text{planeta}(x)]$
  - *Todo satélite es satélite de algún planeta:*
    $\forall x\, [\text{satélite}(x) \to \exists y\, (\text{planeta}(y) \land \text{satélite}(x, y))]$
  - *La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:*
    $\neg\exists x\, \exists y\, [\text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land \text{gira}(\text{Luna}, x) \land \text{gira}(\text{Luna}, y) \land x \neq y]$
  - *Hay exactamente dos planetas:*
    $\exists x\, \exists y\, [\text{planeta}(x) \land \text{planeta}(y) \land x \neq y \land \forall z\, [\text{planeta}(z) \to (z = x \lor z = y)]]$

Lenguaje de primer orden

- Símbolos lógicos:
  - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
  - Conectivas: $\neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$.
  - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
  - Símbolo de igualdad: $=$.
- Símbolos propios:
  - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
  - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
  - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
- Símbolos auxiliares: "(", ")", ",".
- Notación:
  - $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
  - Var representa el conjunto de las variables.
- Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

Ejemplos de lenguajes de primer orden

- Lenguaje del mundo de los bloques:
  - Símbolos de constantes: a, b, c, d, e
  - Símbolos de predicado (y de relación):
    - – de aridad 1: $\text{sobre\_mesa}, \text{libre}, \text{es\_bloque}$
    - – de aridad 2: $\text{sobre}, \text{bajo}, \text{encima}$
    - – de aridad 3: pila
  - Símbolos de función (de aridad 1): $\text{superior}, \text{tope}$
- Lenguaje de la aritmética:
  - Símbolos de constantes: $0, 1$
  - Símbolos de función:
    - – monaria: s (siguiente)
    - – binarias: $+, \cdot$
  - Símbolo de predicado binario: $<$

Términos

- Def. de término de un lenguaje de primer orden L:
  - Las variables son términos de L.
  - Las constantes de L son términos de L.
  - Si f es un símbolo de función n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
    - $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\text{superior}(\text{superior}(c))$ es un término.
    - $\text{libre}(\text{superior}(c))$ no es un término.
- Notación:
  - $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
  - $\text{Térm}(L)$ representa el conjunto de los términos de L

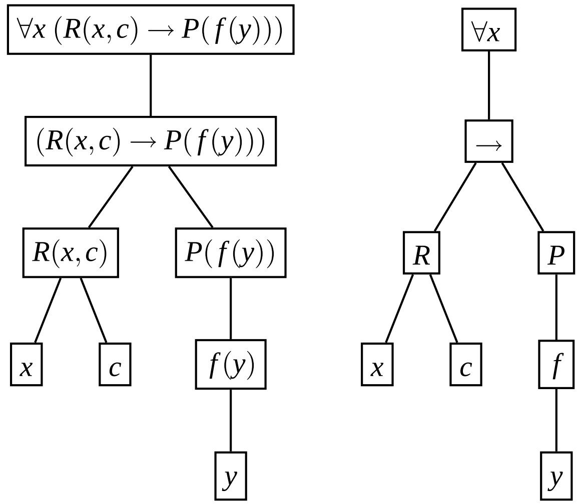
Fórmulas atómicas

- Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden L:
  - Si t_1 y t_2 son términos de L, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de L.
  - Si P es un símbolo de relación n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $<(\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    - $+(x, y) = \cdot(x, y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\text{libre}(\text{superior}(c))$ es una fórmula atómica.
    - $\text{tope}(c) = \text{superior}(b)$ es una fórmula atómica.
- Notación:
  - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
  - $\text{Atom}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas atómicas de L.

Fórmulas

- Definición de las fórmulas de L:
  - Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L.
  - Si F y G son fórmulas de L, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de L.
  - Si F es una fórmula de L, entonces $\forall x\, F$ y $\exists x\, F$ son fórmulas de L.
- Ejemplos:
  - En el lenguaje de la aritmética,
    - $\forall x\, \exists y\, <(x, y)$ es una fórmula que se escribe como $\forall x\, \exists y\, x < y$
    - $\forall x\, \exists y\, +(x, y)$ no es una fórmula.
  - En el lenguaje del mundo de los bloques,
    - $\forall x\, (\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$ es una fórmula.
- Notación:
  - $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
  - $\text{Fórm}(L)$ representa el conjunto de las fórmulas de L.

Árboles de análisis (o de formación)



Subfórmulas

- Def: El conjunto Subf(F) de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \forall x\, G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \exists x\, G \end{cases}$$

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Subf}(\forall x\,(R(x,c) \to P(f(y)))) = \{\ & \forall x\,(R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

Criterios de reducción de paréntesis

- Pueden eliminarse los paréntesis externos.
  $F \wedge G$ es una abreviatura de $(F \wedge G)$
- Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores: $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.
  $\forall x\, P(x) \to Q(x)$ es una abreviatura de $(\forall x\, P(x)) \to Q(x)$
- Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

$F \vee G \vee H$	es una abreviatura de	$(F \vee (G \vee H))$
$F \wedge G \wedge H \to \neg F \vee G$	es una abreviatura de	$((F \wedge (G \wedge H)) \to (\neg F \vee G))$

- Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.

$x + y$	es una abreviatura de	$+(x,y)$
$x < y$	es una abreviatura de	$<(x,y)$

Conjuntos de variables

- Def.: El conjunto de las variables del término t se define recursivamente por:

$$\text{V}(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ \text{V}(t_1) \cup \dots \cup \text{V}(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Def.: El conjunto de las variables de la fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{V}(F) = \begin{cases} \text{V}(t_1) \cup \text{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \text{V}(t_1) \cup \dots \cup \text{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \dots, t_n); \\ \text{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \text{V}(G) \cup \text{V}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \text{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \forall x\, G; \\ \text{V}(G), & \text{si } F \text{ es } \exists x\, G \end{cases}$$

- Ejemplos:
  - El conjunto de las variables de $\forall x\,(R(x,c) \to P(f(y)))$ es $\{x,y\}$.
  - El conjunto de las variables de $\forall x\,(R(a,c) \to P(f(y)))$ es $\{y\}$.

Apariciones libres y ligadas

- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es ligada si es en una subfórmula de F de la forma $\forall x\, G$ ó $\exists x\, G$.
- Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es libre si no es ligada.
- Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:
  $\forall x\, (P(\underline{x}) \rightarrow R(\underline{x},y)) \rightarrow (\exists y\, P(\underline{y}) \rightarrow R(z,x))$
  $\exists x\, R(\underline{x},y) \vee \forall y\, P(\underline{y})$
  $\forall x\, (P(\underline{x}) \rightarrow \exists y\, R(\underline{x},\underline{y}))$
  $P(x) \rightarrow R(x,y)$

Variables libres y ligadas

- Def.: La variable x es libre en F si tiene una aparición libre en F.
- Def.: La variable x es ligada en F si tiene una aparición ligada en F.
- Prop.: El conjunto de las variables libres de una fórmula F es:

$$\mathsf{VL}(F) = \begin{cases} \mathsf{V}(t_1) \cup \mathsf{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathsf{V}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1,\dots,t_n); \\ \mathsf{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathsf{VL}(G) \cup \mathsf{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathsf{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \forall x\, G; \\ \mathsf{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } \exists x\, G \end{cases}$$

- Ejemplo:

Fórmula	Ligadas	Libres
$\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x,y)) \rightarrow (\exists y\, P(y) \rightarrow R(x,z))$	x,y	x,y,z
$\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, R(x,y))$	x,y	
$\forall z\, (P(x) \rightarrow R(x,y))$		x,y

Fórmulas cerradas y abiertas

- Fórmula cerradas:
  - Def.: Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, R(x,y))$ es cerrada.
    $\exists x\, R(x,y) \vee \forall y\, P(y)$ no es cerrada.
- Fórmulas abiertas:
  - Def.: Una fórmula abierta es una fórmula con variables libres.
  - Ejemplos: $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, R(x,y))$ no es abierta.
    $\exists x\, R(x,y) \vee \forall y\, P(y)$ es abierta.

Semántica: Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje L es un par $\mathscr{I} = (U,I)$ tal que:
  - U es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - I es una función con dominio el conjunto de símbolos propios de L tal que
    - si c es una constante de L, entonces $I(c) \in U$;
    - si f es un símbolo de función n–aria de L, entonces $I(f) : U^n \rightarrow U$;
    - si P es un símbolo de relación 0–aria de L, entonces $I(P) \in \{1,0\}$;
    - si R es un símbolo de relación n–aria ($n > 0$) de L, entonces $I(R) \subseteq U^n$;
- Una asignación A en una estructura (U,I) es una función $A : \mathrm{Var} \rightarrow U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de L es un par $(\mathscr{I},A)$ formado por una estructura $\mathscr{I}$ de L y una asignación A en $\mathscr{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

Ejemplos de estructuras

Sea L el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:
constante: 0;
símbolo de función monaria: s;
símbolo de función binaria: $+$ y
símbolo de relación binaria: $\leq$

- Primera estructura de L:
  $U_1 = \mathbb{N}$
  $I_1(0) = 0$
  $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)
- Segunda estructura de L:
  $U_2 = \{0,1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  $I_2(0) = \varepsilon$ (cadena vacía)
  $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0,1\}^*\}$ (siguiente)
  $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1 w_2) : w_1, w_2 \in \{0,1\}^*\}$ (concatenación)
  $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0,1\}^*, w_1$ es prefijo de $w_2\}$ (prefijo)

Ejemplos de estructuras

- Tercera estructura de L:
  $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  $I_3(0) = cerrado$
  $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$
  $I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto), (cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$
  $I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

e	$I_3(s)(e)$
abierto	*cerrado*
cerrado	*abierto*

$I_3(+)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	*abierto*	*abierto*
cerrado	*abierto*	*cerrado*

$I_3(\leq)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	1	0
cerrado	1	1

Ejemplo de evaluación de términos

- Sean L el lenguaje de la página 21 y t el término $s(x+s(0))$.
  - Si $\mathscr{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(x+s(0))) && = s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(3 +^I s^I(0)) && = s^I(3 +^I 1) = \\ &= s^I(4) && = 5 \end{aligned}$$

  - Si $\mathscr{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(x+s(0))) && = s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(10 +^I s^I(\varepsilon)) && = s^I(10 +^I 1) = \\ &= s^I(101) && = 1011 \end{aligned}$$

  - Si $\mathscr{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(x+s(0))) && = s^I(abierto +^I s^I(0^I)) = \\ &= s^I(abierto +^I s^I(cerrado)) && = s^I(abierto +^I abierto) = \\ &= s^I(abierto) && = cerrado \end{aligned}$$

Evaluación de términos

- Def.: Dada una estructura $\mathscr{I} = (U, I)$ de L y una asignación A en $\mathscr{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathscr{I}_A$: Térm$(L) \to U$ por

$$\mathscr{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathscr{I}_A(t_1), \dots, \mathscr{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- $\mathscr{I}_A(t)$ se lee "el valor de t en $\mathscr{I}$ respecto de A".
- Ejemplo: Sean L el lenguaje de la página 21, t el término $s(+(x, s(0)))$, $\mathscr{I}$ la primera estructura y $A(x) = 3$.

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_A(t) &= \mathscr{I}_A(s(+(x, s(0)))) && = I(s)(\mathscr{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathscr{I}_A(x), \mathscr{I}_A(s(0)))) && = I(s)(I(+)(A(x), \mathscr{I}_A(s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathscr{I}_A(0)))) && = I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) && = I(s)(I(+)(3, 1)) = \\ &= I(s)(4) && = 5 \end{aligned}$$

Evaluación de fórmulas

- Def.: Dada una estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ de L y una asignación A sobre $\mathscr{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathscr{I}_A : \text{Fórm}(L) \to \mathbb{B}$ por
  - Si F es $t_1 = t_2$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_=(\mathscr{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
  - Si F es $P(t_1,\dots,t_n)$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathscr{I}_A(t_1),\dots,\mathscr{I}_A(t_n))$
  - Si F es $\neg G$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_\neg(\mathscr{I}_A(G))$
  - Si F es $G * H$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = H_*(\mathscr{I}_A(G), \mathscr{I}_A(H))$
  - Si F es $\forall x\, G$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene} \\ & \mathscr{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - Si F es $\exists x\, G$, $\quad \mathscr{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que} \\ & \mathscr{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
- $\mathscr{I}_A(F)$ se lee "el valor de F en $\mathscr{I}$ respecto de A".

Conceptos auxilares para la evaluación de fórmulas

- La función de verdad de la igualdad en U es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_=(u_1,u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Función de verdad de una relación: Si R es una relación n–aria en U (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de R es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por

$$H_R(u_1,\dots,u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1,\dots,u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Variante de una asignación: Sea A una asignación en la estructura (U,I) y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por

$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Ejemplo de evaluación de fórmula

Evaluación de $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$ en la estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$

$\mathscr{I}_A(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x,y)) = \text{V}$ y $\mathscr{I}_{A[x/2]}(\exists y\, P(x,y)) = \text{V}$

$\mathscr{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathscr{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) &= P^I(1,1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathscr{I}_{A[x/1]}(\exists y\, P(x,y)) = \text{V}$.

$\mathscr{I}_{A[x/2]}(\exists y\, P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathscr{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) &= P^I(2,2) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathscr{I}_{A[x/2]}(\exists y\, P(x,y)) = \text{V}$.

Por tanto, $\mathscr{I}_A(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) = \text{V}$

Ejemplo de evaluación de fórmulas

Ejemplo: Evaluación de $\forall x\, g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$.

$\mathscr{I}_A(\forall x\, g(g(x)) = x) = \text{V} \Leftrightarrow \mathscr{I}_{A[x/1]}g(g(x)) = x = \text{V}$ y $\mathscr{I}_{A[x/2]}g(g(x)) = x = \text{V}$

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1) \\ &= (g^I(2) = 1) \\ &= (1 = 1) \\ &= \text{V} \\ \mathscr{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2) \\ &= (g^I(1) = 2) \\ &= (2 = 2) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathscr{I}_A(\forall x\, g(g(x)) = x) = \text{V}$.

Dependencias en la evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea G la fórmula $\forall x\, \exists y\, R(y,x)$, entonces
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ V, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ F, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathscr{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea G la fórmula $\exists x\, \forall y\, R(x,y)$, entonces
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ V, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ F, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y A una asignación en $\mathscr{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea G la fórmula $\forall y\, R(x,y)$, entonces
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ V, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathscr{I}_A(G) = $ F, siendo $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Evaluación y variables libres

- Sea t un término de L e $\mathscr{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathscr{I}$ que coinciden sobre las variables de t, entonces $\mathscr{I}_A(t) = \mathscr{I}_B(t)$.
  - Si t no tiene variables, entonces $\mathscr{I}_A(t) = \mathscr{I}_B(t)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathscr{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathscr{I}(t)$.
- Sea F una fórmula de L e $\mathscr{I}$ una estructura de L.
  - Si A y B son dos asignaciones en $\mathscr{I}$ que coinciden sobre las variables libres de F, entonces $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_B(F)$.
  - Si F es cerrada, entonces $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathscr{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathscr{I}(F)$.

Modelo de una fórmula

- Sean F una fórmula de L e $\mathscr{I}$ una estructura de L.
  - $(\mathscr{I}, A)$ es una realización de F si A es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $\mathscr{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathscr{I}_A \models F$.
  - $\mathscr{I}$ es un modelo de F si, para todo asignación A en $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathscr{I} \models F$.
- Ejemplos: Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.
  - Si A es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$. entonces
    $\mathscr{I}_A \models f(x,y) = g(x,y)$,
  - Si B es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $B(x) = 1, B(y) = 2$. entonces
    $\mathscr{I}_B \not\models f(x,y) = g(x,y)$,
  - $\mathscr{I} \not\models f(x,y) = g(x,y)$
  - $\mathscr{I} \models f(x,y) = f(y,x)$

Satisfacibilidad y validez

- Def.: Sea F una fórmula de L.
  - F es válida si toda estructura de L es modelo de F
    (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$).
    Se representa por $\models F$.
  - F es satisfacible si tiene alguna realización
    (i.e. existe alguna estructura $\mathscr{I}$ de L y alguna asignación A en I tales que $\mathscr{I}_A(F) = 1$).
  - F es insatisfacible si no tiene ninguna realización
    (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en I se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $\exists x\, P(x) \lor \forall x\, \neg P(x)$ es válida.
  - $\exists x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(x)$ es satisfacible, pero no es válida.
    $\mathscr{I}_A(\exists x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(x)) = 1$, siendo $\mathscr{I} = (\{a,b\}, I)$, $I(P) = \{a\}$.
    $\mathscr{I}_A(\exists x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(x)) = 1$, siendo $\mathscr{I} = (\{a\}, I)$, $I(P) = \{a\}$.
  - $\forall x\, P(x) \land \exists x\, \neg P(x)$ es insatisfacible.

Satisfacibilidad y validez

- F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.

  F es válida

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$

  $\iff$ para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathscr{I}_A(\neg F) = 0$

  $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
- Si F es válida, entonces F es satisfacible.

  F es válida

  $\Longrightarrow$ para toda estructura $\mathscr{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$

  $\Longrightarrow$ existe una estructura $\mathscr{I}$ y una asignación A tales que $\mathscr{I}_A(F) = 1$

  $\Longrightarrow$ F es satisfacible.
- F es satisfacible $\;\not\Longrightarrow\;$ $\neg F$ es insatisfacible.
  $\forall x\, P(x)$ y $\neg\forall x\, P(x)$ son satisfacibles.
- Sea F una fórmula de L y $x_1,\dots,x_n$ las variables libres de F.
  - F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n\, F$ es válida. [Cierre universal].
  - F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots \exists x_n\, F$ es satisfacible. [Cierre existencial].

Modelo de un conjunto de fórmulas

- Notación: $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L e $\mathscr{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathscr{I}$.
  - $(\mathscr{I}, A)$ es una realización de S si A es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que para toda $F \in S$ se tiene que $\mathscr{I}_A(F) = 1$.
    Se representa por $\mathscr{I}_A \models S$.
  - $\mathscr{I}$ es un modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathscr{I} \models F$
    (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación A en $\mathscr{I}$ se tiene $\mathscr{I}_A(F) = 1$).
    Se representa por $\mathscr{I} \models S$.
- Ejemplos:
  - Sea $S = \{\forall y\, R(x,y),\ \forall y\, f(x,y) = y\}$.
    - $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
    - $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de S.
  - Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$.
    - $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de S.
    - $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de S.

Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas de L.
  - S es consistente si S tiene alguna realización
    (i.e. existe alguna estructura $\mathscr{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathscr{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
  - S es inconsistente si S no tiene ninguna realización
    (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).
- Ejemplos:
  - $S = \{\forall y\, R(x,y),\ \forall y\, f(x,y) = y\}$ es consistente.
    $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
  - $S = \{P(x) \to Q(x),\ \forall y\, P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.
- Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces S es consistente syss S tiene algún modelo.

Consecuencia lógica

- Def.: Sean F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L.
  - F es consecuencia lógica de S si todas las realizaciones de S lo son de F.
    (i.e. para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$,
    si $\mathscr{I}_A \models S$ entonces $\mathscr{I}_A \models F$).
    Se representa por $S \models F$.
  - Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.
  - Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.
- Ejemplos:
  - $\forall x\, P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models \forall x\, P(x)$
    $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (U, I), U = \{1,2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1$.
  - $\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ Q(c)\} \not\models P(c)$
    $(\mathscr{I}, A)$ con $\mathscr{I} = (U, I), U = \{1,2\}, c^I = 1, P^I = \{2\}, Q^I = \{1,2\}$.
  - $\{\forall x\, (P(x) \to Q(x)),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
  - $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$

Consecuencia lógica e inconsistencia

- $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.

  $S \models F$

  $\Longleftrightarrow$ para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathscr{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathscr{I}_A(F) = 1$.

  $\Longleftrightarrow$ para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$,
  si, para todo $G \in S$, $\mathscr{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathscr{I}_A(\neg F) = 0$.

  $\Longleftrightarrow$ para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$,
  existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathscr{I}_A(H) = 0$.

  $\Longleftrightarrow$ $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
- Sean F una fórmula *cerrada* de L y S un conjunto de fórmulas *cerradas* de L. Entonces, son equivalentes
  - F es consecuencia lógica de S
  - todos los modelos de S lo son de F.

Equivalencia lógica

- Def.: Sean F y G fórmulas de L. F y G son equivalentes si para toda estructura $\mathscr{I}$ de L y toda asignación A en $\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_A(F) = \mathscr{I}_A(G)$.
  Se representa por $F \equiv G$.
- Ejemplos:
  - $P(x) \not\equiv P(y)$.
    $\mathscr{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
  - $\forall x\, P(x) \equiv \forall y\, P(y)$.
  - $\forall x\, (P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$.
  - $\exists x\, (P(x) \land Q(x)) \not\equiv \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$.
    $\mathscr{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
- Propiedades: Sean F y G fórmulas cerradas de L.
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
  - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
2. M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
3. C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 26–35.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 64–87.
5. J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
6. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
7. M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
8. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.