Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.1 Formalizar el siguiente argumento: *“Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla”*.

Ejercicio 6.2 Para representar el mundo de los bloque se parte de los siguientes predicados primitivos:

- sobre(x,y) se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
- sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa

Definir las siguientes relaciones:

- bajo(x,y) se verifica si el bloque x está debajo del bloque y.
- encima(x,y) se verifica si el bloque x está encima del bloque y, pudiendo haber otros bloques entre ellos.
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
- pila(x,y,z) se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa.

Representar la siguiente propiedad: el bloque central de cualquier pila no está libre.

Ejercicio 6.3 Otra representación del mundo de los bloques se basa en los conceptos primitivos:

- es_bloque(x) se verifica si x es un bloque.
- superior(x) es el bloque que está sobre el bloque x.

Definir los siguientes conceptos:

- sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa.
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima.
- tope(x) es el bloque libre que está encima de x.

Ejercicio 6.4 Formalizar las siguientes expresiones, usando la conceptualización

planeta(x)	x es un planeta
Tierra	la Tierra
Luna	la Luna
satélite(x)	x es un satélite
satélite(x,y)	x es un satélite de y
gira(x,y)	x gira alrededor de y
Sol	el Sol

1. La Tierra es un planeta.
2. La Luna no es un planeta.
3. La Luna es un satélite.
4. La Tierra gira alrededor del Sol.
5. Todo planeta es un satélite.
6. Todo planeta gira alrededor del Sol.

7. Algún planeta gira alrededor de la Luna.
8. Hay por lo menos un satélite.
9. Ningún planeta es un satélite.
10. Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo.
11. Alrededor de los satélites no giran objetos.
12. Hay exactamente un satélite.
13. La Luna es un satélite de la Tierra.
14. Todo planeta tiene un satélite.
15. La Tierra no tiene satélites.
16. Algún planeta no tiene satélites.
17. Sólo los planetas tienen satélites.
18. Todo satélite es satélite de algún planeta.
19. La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes.
20. Hay exactamente dos planetas.

Ejercicio 6.5 Decidir si las siguientes expresiones son términos en el lenguaje de la aritmética:

1. $+(\cdot(x,1),s(y))$.
2. $+(\cdot(x,<),s(y))$.

Ejercicio 6.6 Decidir si las siguientes expresiones son términos en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. superior(superior(c)).
2. libre(superior(c)).

Ejercicio 6.7 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas atómicas en el lenguaje de la aritmética:

1. $<(\cdot(x,1),s(y))$.
2. $+(x,y)=\cdot(x,y)$.

Ejercicio 6.8 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas atómicas en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. libre(superior(c)).
2. tope(c) = superior(b).

Ejercicio 6.9 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas en el lenguaje de la aritmética:

1. $\forall x \exists y < (x,y)$
2. $\forall x \exists y + (x,y)$.

Ejercicio 6.10 Decidir si la siguiente expresión es una fórmula en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. $\forall x(\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$.

Ejercicio 6.11 Dibujar el árbol de análisis de la fórmula $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 6.12 Calcular las subfórmulas de $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 6.13 Calcular los conjuntos de variables de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.
2. $\forall x(R(a,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 6.14 Determinar las ocurrencias libres y ligadas de las variables de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y P(y) \to R(z,x))$.
2. $\exists x R(x,y) \vee \forall y P(y)$
3. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
4. $P(x) \to R(x,y)$

Ejercicio 6.15 Calcular el conjunto de variables libres y el conjunto de variables ligadas de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y P(y) \to R(x,z))$.
2. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
3. $\forall z(P(x) \to R(x,y))$.

Ejercicio 6.16 Determinar si las siguientes fórmulas son abiertas o cerradas:

1. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
2. $\exists x R(x,y) \vee \forall y P(y)$.

Ejercicio 6.17 Se considera el lenguaje L cuyos símbolos propios son:

- constante: 0;
- símbolo de función monaria: s;
- símbolo de función binaria: $+$ y
- símbolo de relación binaria: $\leq$

y las siguientes estructuras de L

- $\mathscr{I}_1 = (U_1, I_1)$ con
  - $U_1 = \mathbb{N}$
  - $I_1(0) = 0$
  - $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  - $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  - $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$
- $\mathscr{I}_2 = (U_2, I_2)$ con
  - $U_2 = \{0,1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  - $I_2(0) = \varepsilon$ (cadena vacía)
  - $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0,1\}^*\}$ (siguiente)
  - $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1 w_2) : w_1, w_2 \in \{0,1\}^*\}$ (concatenación)
  - $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0,1\}^*, w_1$ es prefijo de $w_2\}$ (prefijo)
- $\mathscr{I}_3 = (U_3, I_3)$ con
  - $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  - $I_3(0) = cerrado$

- $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$

e	$I_3(s)(e)$
$abierto$	$cerrado$
$cerrado$	$abierto$

- $I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto),$
  $(cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$

$I_3(+)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	$abierto$	$abierto$
$cerrado$	$abierto$	$cerrado$

- $I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

$I_3(\leq)$	$abierto$	$cerrado$
$abierto$	1	0
$cerrado$	1	1

Calcular el valor del término $s(x+s(0))$ en

1. $\mathscr{I}_1$ con la asignación $A(x) = 3$.
2. $\mathscr{I}_2$ con la asignación $A(x) = 10$.
3. $\mathscr{I}_3$ con la asignación $A(x) = abierto$.

Ejercicio 6.18 Calcular el valor de la fórmula $\forall x \exists y P(x,y)$ en la estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$.

Ejercicio 6.19 Calcular el valor de la fórmula $\forall x g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$.

Ejercicio 6.20 Calcular el valor de las siguientes fórmulas.

1. $\forall x \exists y R(y,x)$ en $\mathscr{I} = (U,I)$ con
   a) $U = \mathbb{Z}$ e $I(R) = <$
   b) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = <$
2. $\exists x \forall y R(x,y)$ en $\mathscr{I} = (U,I)$ con
   a) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = \leq$
   b) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = \geq$
3. $\forall y R(x,y)$ en $\mathscr{I} = (U,I)$ con
   a) $U = \mathbb{N}$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 0$.
   b) $U = \mathbb{N}$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Ejercicio 6.21 Sea $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.

1. Determinar si $(\mathscr{I}, A)$, donde A es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$, es una realización de $f(x,y) = g(x,y)$.
2. Determinar si $(\mathscr{I}, A)$, donde A es una asignación en $\mathscr{I}$ tal que $A(x) = 1$, $A(y) = 2$, es una realización de $f(x,y) = g(x,y)$.
3. Determinar si $\mathscr{I}$ es un modelo de $f(x,y) = g(x,y)$.
4. Determinar si $\mathscr{I}$ es un modelo de $f(x,y) = f(y,x)$.

Ejercicio 6.22 Determinar si las siguientes fórmulas son válidas, satisfacibles o insatisfacibles:

1. $\exists x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$.
2. $\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$.
3. $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)$.

Ejercicio 6.23 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.
2. Si F es válida, entonces F es satisfacible.
3. Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.
4. Sea F una fórmula de L y $x_1,\dots,x_n$ las variables libres de F. Entonces, F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n F$ es válida.
5. Sea F una fórmula de L y $x_1,\dots,x_n$ las variables libres de F. Entonces, F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible.

Ejercicio 6.24 Sea $S = \{\forall y R(x,y),\ \forall y f(x,y) = y\}$. Determinar si $(\mathscr{I},A)$ es una realización de S

1. $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$.
2. $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$.

Ejercicio 6.25 Sea $S = \{R(e,y),\ f(e,y) = y\}$. Determinar si $(\mathscr{I},A)$ es un modelo de S

1. $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$.
2. $\mathscr{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$.

Ejercicio 6.26 Determinar si los siguientes conjuntos son consistentes:

1. $S = \{\forall y R(x,y),\ \forall y f(x,y) = y\}$.
2. $S = \{P(x) \to Q(x),\ \forall y P(y),\ \neg Q(x)\}$.

Ejercicio 6.27 Decidir si se verifican las siguientes relaciones de consecuencia lógica:

1. $\forall x P(x) \models P(y)$.
2. $P(y) \models \forall x P(x)$.
3. $\{\forall x (P(x) \to Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$.
4. $\{\forall x (P(x) \to Q(x)),\ Q(c)\} \models P(c)$.
5. $\{\forall x (P(x) \to Q(x)),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$.
6. $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.28 Determinar las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x \exists z\, [P(x,y) \to P(x,z) \wedge \exists x\, (P(y,z) \wedge Q(x,y))]$
2. $\forall x \exists z\, [P(x,y) \to R(x,z) \to \exists y\, (P(y,z) \vee R(x,y))]$

Ejercicio 6.29 Sea F la fórmula $P(x) \to P(a)$, donde a es un símbolo de constante. ¿Es F satisfacible? ¿Tiene modelos? ¿Es F una fórmula válida?

Ejercicio 6.30 Sea L un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P (de aridad 1), Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f, de aridad 1. Sea $\mathscr{I} = (U, I)$ la estructura dada por:

- $U = \{a,b,c,d\}$;
- $I(P) = \{a,b\}$,
- $I(Q) = \{(a,b), (b,b), (c,b)\}$,
- $I(f) = \{(a,b),(b,b),(c,a),(d,c)\}$.

Decidir cuáles de las siguientes fórmulas de L son válidas en $\mathscr{I}$:

1. $P(x) \to \exists y Q(y,x)$.
2. $\forall x Q(f(x),x)$.
3. $Q(f(x),x) \to Q(x,x)$.
4. $Q(x,y) \to P(x)$.

Ejercicio 6.31 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes?

1. $\{Q(x), \forall x[Q(x) \to R(x)], \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{\forall x P(x,y), \forall x \neg P(x,x)\}$
3. $\{\forall x \forall y[P(x,y) \to P(y,x)], \forall x \neg P(x,x), \exists y P(x,y)\}$

Ejercicio 6.32 Decidir si son correctas o no las siguientes relaciones de consecuencia:

1. $\{\forall x[P(x) \lor Q(x)]\} \models \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
2. $\{\forall x[P(x) \to Q(x)]\} \models \forall x P(x)\ lif \forall x Q(x)$
3. $\{\forall x P(x) \to \forall x Q(x)\} \models \forall x[P(x) \to Q(x)]$
4. $\{P(x) \lor Q(f(x))\} \models P(x) \lor Q(x)$

Ejercicio 6.33 En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$F_1 := \forall x[f(x) \neq a]$,
$F_2 := \forall x \forall y[f(x) = f(y) \to x = y]$,
$F_3 := \forall x[x \neq a \to \exists y[f(y) = x]]$.

Probar que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las dos restantes.

Ejercicios de exámenes

Ejercicio 6.34 [Examen de Junio de 2002] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{P, f\}$ y las fórmulas de L: $F_1 : \forall x \exists y P(x, f(y))$, $F_2 : \exists y \forall x P(x, f(y))$ y $F_3 : \exists y \forall x P(x,y)$.

1. Hallar una L estructura, $\mathscr{I}$, tal que $\mathscr{I} \models F_1$ pero $\mathscr{I} \not\models F_2$.
2. Hallar una L estructura, $\mathscr{I}'$, tal que $\mathscr{I}' \models F_3$ pero $\mathscr{I}' \not\models F_2$.

Ejercicio 6.35 [Examen de Diciembre de 2003] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{a, f, P, Q, R\}$ y el conjunto de fórmulas de L

$$S = \{\ \begin{array}{l} \forall x[Q(x) \to R(x)], \\ \forall x \forall y[P(x,y) \to P(y,x)], \\ \forall x \neg P(x,x), \\ \forall x[P(f(x),x) \to Q(f(x))], \\ \forall x[R(x) \leftrightarrow P(x, f(x))], \\ Q(f(a))\} \end{array}$$

Construir razonadamente un modelo $\mathscr{I}$ de S cuyo universo sea $U = \{1,2,3,4,5\}$.

Ejercicio 6.36 [Examen de Junio de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathscr{I}$ dada por: Universo: $\{a,b\}$, $Q^I = \{(a,b), (b,a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $\forall x[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$
2. $\exists x[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

Ejercicio 6.37 [Examen de Septiembre de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.

1. Probar que las fórmulas $\forall x\exists yP(x,y)$ y $\exists x\forall yP(x,y)$ no son equivalentes, dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.
2. En la estructura $\mathscr{I} = (U,I)$ cuyo universo es $U = \{a,b,c\}$ y $P^I = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?
   a) $\forall x\exists yP(x,y) \to \exists x\forall yP(x,y)$
   b) $\exists x\forall yP(x,y) \to \forall x\exists yP(x,y)$
   c) $\neg[\forall x\exists yP(x,y) \land \exists x\forall yP(x,y)]$

Ejercicio 6.38 [Examen de Septiembre de 2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para toda fórmula F, toda subfórmula G de F y toda variable libre x de G, se tiene que x es una variable libre de F.
2. Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene $\exists x[F \land G] \equiv \exists xF \land \exists xG$.
3. Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene $\exists x[F \land G] \equiv \exists xF \land \exists xG$.