Ejercicio 7.1 **[T]** Sea σ la sustitución $[x/f(y,a), y/z]$. Calcular

1. $a\sigma$.
2. $w\sigma$.
3. $h(a,x,w)\sigma$.
4. $f(x,y)\sigma$.
5. $h(a, f(x,y), w)\sigma$.

Ejercicio 7.2 **[T]** Sea σ la sustitución $[x/f(y), y/b]$. Calcular

1. $(\forall x\ (Q(x) \rightarrow R(x,y)))\sigma$.
2. $(Q(x) \rightarrow \forall x\ R(x,y))\sigma$.
3. $(\forall x\ (Q(x) \rightarrow \forall y\ R(x,y)))\sigma$.

Ejercicio 7.3 **[T]** Decidir si la sustitución σ es libre para la fórmula F en cada uno de los siguientes casos:

1. σ es $[y/x]$ y F es $\exists x\ (x < y)$.
2. σ es $[y/g(y)]$ y F es $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$.
3. σ es $[y/g(x)]$ y F es $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$.

Ejercicio 7.4 Demostrar mediante deducción natural

1. $P(c)$,
   $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$
   $\vdash \neg Q(c)$

2. $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$,
   $\forall x P(x)$
   $\vdash \forall x \neg Q(x)$

3. $\forall x P(x)$
   $\vdash \exists x P(x)$

4. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$,
   $\exists x P(x)$
   $\vdash \exists x Q(x)$

5. $\forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$,
   $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$
   $\vdash \exists x[P(x) \wedge R(x)]$

6. $\exists x P(x)$,
   $\forall x \forall y[P(x) \rightarrow Q(y)]$
   $\vdash \forall y Q(y)$

7. $\vdash \neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$

8. $\vdash \forall x[P(x) \land Q(x)] \leftrightarrow \forall xP(x) \land \forall xQ(x)$

9. $\vdash \exists xP(x) \lor \exists xQ(x) \leftrightarrow \exists x[P(x) \lor Q(x)]$

10. $\vdash \exists x\exists yP(x,y) \leftrightarrow \exists y\exists xP(x,y)$

11. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
    $\vdash \forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$

12. $\exists x\neg P(x)$
    $\vdash \neg\forall xP(x)$

13. $\forall xP(x)$
    $\vdash \forall yP(y)$

14. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
    $\vdash \forall x\neg Q(x) \rightarrow \forall x\neg P(x)$

15. $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$
    $\vdash \neg\exists x[P(x) \land Q(x)]$

16. $\forall x\forall yP(x,y)$
    $\vdash \forall u\forall vP(u,v)$

17. $\exists x\exists yP(x,y)$
    $\vdash \exists u\exists vP(u,v)$

18. $\exists x\forall yP(x,y)$
    $\vdash \forall y\exists xP(x,y)$

19. $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$
    $\vdash P(a) \rightarrow \exists xQ(x)$

20. $P(a) \rightarrow \exists xQ(x),$
    $\vdash \exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$

21. $\exists xP(x) \rightarrow Q(a)$
    $\vdash \forall x[P(x) \rightarrow Q(a)]$

22. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(a)],$
    $\vdash \exists x[P(x) \rightarrow Q(a)]$

23. $\forall xP(x) \lor \forall xQ(x)$
    $\vdash \forall x[P(x) \lor Q(x)]$

24. $\exists x[P(x) \land Q(x)]$
    $\vdash \exists xP(x) \land \exists xQ(x)$

25. $\forall x \forall y [P(y) \to Q(x)]$
    $\vdash \exists y P(y) \to \forall x Q(x)$

26. $\neg \forall x \neg P(x)$,
    $\vdash \exists x P(x)$

27. $\forall x \neg P(x)$
    $\vdash \neg \exists x P(x)$

28. $\exists x P(x)$
    $\vdash \neg \forall x \neg P(x)$

29. $P(a) \to \forall x Q(x)$
    $\vdash \forall x [P(a) \to Q(x)]$

30. $\forall x \forall y \forall z [R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)]$,
    $\forall x \neg R(x,x)$
    $\vdash \forall x \forall y [R(x,y) \to \neg R(y,x)]$

31. $\forall x [P(x) \lor Q(x)]$,
    $\exists x \neg Q(x)$,
    $\forall x [R(x) \to \neg P(x)]$
    $\vdash \exists x \neg R(x)$

32. $\forall x [P(x) \to (Q(x) \lor R(x))]$,
    $\neg \exists x [P(x) \land R(x)]$
    $\vdash \forall x [P(x) \to Q(x)]$

33. $\exists x \exists y [R(x,y) \lor R(y,x)]$
    $\vdash \exists x \exists y R(x,y)$

34. $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
    $\vdash \forall x [P(x) \lor Q(x)]$

35. $\exists x [P(x) \land Q(x)]$
    $\vdash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

36. $\forall x [R(x) \to Q(x)]$,
    $\exists x [P(x) \land \neg Q(x)]$
    $\vdash \exists x [P(x) \land \neg R(x)]$

37. $\exists x [P(x) \land Q(x)]$,
    $\forall y [P(y) \to R(y)]$
    $\vdash \exists x [R(x) \land Q(x)]$

38. $\forall x R(x,x)$,
$\forall x \forall y \forall z[\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \rightarrow \neg R(x,z)]$
$\vdash \forall x \forall y[R(x,y) \lor R(y,x)]$

39. $\exists x \exists y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
$\vdash \exists x \exists y R(x,y)$

40. $\forall x[P(x) \rightarrow \exists y Q(y)]$,
$\vdash \forall x \exists y[P(x) \rightarrow Q(y)]$

41. $\forall x[P(x) \rightarrow \neg C(x)]$,
$\exists x[C(x) \land B(x)]$
$\vdash \exists x[B(x) \land \neg P(x)]$

42. $\forall x \exists y[P(x) \rightarrow Q(y)]$
$\vdash \forall x[P(x) \rightarrow \exists y Q(y)]$

43. $\neg \forall x[P(x) \rightarrow Q(a)]$
$\vdash \exists x P(x) \land \neg Q(a)$

44. $\forall x P(x)$,
$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \lor R(x)]$,
$\exists x \neg Q(x)$
$\vdash \exists x R(x)$

45. $\forall x \forall y[R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$,
$\forall x \forall y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
$\vdash \forall x \forall y \forall z[\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \rightarrow \neg R(x,z)]$

46. $\neg \forall x P(x)$
$\vdash \exists x \neg P(x)$

47. $\forall x \forall y[(\exists z R(y,z)) \rightarrow R(x,y)]$,
$\exists x \exists y R(x,y)$
$\vdash \forall x \forall y R(x,y)$

48. $\exists x[P(x) \land \neg Q(x)] \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow R(y)]$,
$\exists x[P(x) \land S(x)]$,
$\forall x[P(x) \rightarrow \neg R(x)]$
$\vdash \exists x[S(x) \land Q(x)]$

49. $\vdash \neg \exists x \forall y[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$

50. $\forall x[\exists y R(x,y) \rightarrow \exists y[\forall z R(y,z) \land R(x,y)]]$,
$\exists x \exists y R(x,y)$
$\vdash \exists x \forall y R(x,y)$

51. $\forall x[P(x) \rightarrow \forall y[Q(y) \rightarrow R(x,y)]]$,
    $\exists x[P(x) \land \exists y \neg R(x,y)]$
    $\vdash \neg \forall x Q(x)$

52. $\exists x[P(x) \rightarrow \forall y Q(y)]$
    $\vdash \exists x \forall y[P(x) \rightarrow Q(y)]$

53. $\exists y \exists z[\forall x \neg R(x,y) \lor \forall x \neg R(x,z)]$
    $\vdash \neg \forall y \forall z \exists x[R(x,y) \land R(x,z)]$

54. $\exists x[P(x) \rightarrow \forall y[P(y) \rightarrow Q(y)]]$,
    $\neg \exists x Q(x)$
    $\vdash \neg \forall x P(x)$

55. $\neg \exists x[P(x) \land \neg \forall y[Q(y) \rightarrow R(x,y)]]$,
    $\exists x[P(x) \land \exists y \neg R(x,y)]$
    $\vdash \exists x \neg Q(x)$

56. $\forall x \forall y[\exists z[R(z,y) \land \neg R(x,z)] \rightarrow R(x,y)]$,
    $\neg \exists x R(x,x)$
    $\vdash \forall x \forall y[\neg R(y,x) \rightarrow \neg R(x,y)]$

57. $P(a) \rightarrow \neg \forall x \neg R(x)$,
    $\vdash \neg \forall x[\neg R(x) \land P(a)]$

58. $\forall x \forall y \forall z[P(x,y) \land P(y,z) \rightarrow R(x,z)]$,
    $\forall x \exists y P(x,y)$
    $\vdash \forall x \exists y R(x,y)$

59. $\forall x[P(x) \rightarrow (\exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y Q(y,x))]$,
    $\forall x[\exists y Q(y,x) \rightarrow Q(x,x)]$,
    $\neg \exists x Q(x,x)$
    $\vdash \forall x[P(x) \rightarrow \forall y \neg Q(x,y)]$

60. $\forall x[Q(x) \rightarrow \neg R(x)]$,
    $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \lor S(x)]$,
    $\exists x[P(x) \land R(x)]$
    $\vdash \exists x[P(x) \land S(x)]$

61. $\forall x[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))]$,
    $\exists x[P(x) \lor \neg R(x)]$
    $\vdash \exists x[R(x) \rightarrow S(x)]$

Nota: *Los 10 primeros apartados están resueltos en las transparencias de clase. Desde el apartado 34 hasta el final son ejercicios de exámenes.*

Ejercicio 7.5 Demostrar mediante deducción natural

1. $t_1 = t_2$,
   $t_2 = t_3$
   $\vdash t_1 = t_3$

2. $t_1 = t_2$
   $\vdash t_2 = t_1$

3. $P(a)$
   $\vdash \forall x((x = a) \to P(x))$

4. $\exists x \exists y (R(x,y) \vee R(y,x))$
   $\neg \exists x R(x,x)$
   $\vdash \exists x \exists y \neg (x = y)$

5. $\forall x P(a,x,x)$,
   $\forall x \forall y \forall z (P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))$
   $\vdash P(f(a),a,f(a)$

6. $\forall x P(a,x,x)$,
   $\forall x \forall y \forall z (P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))$
   $\vdash \exists z P(f(a),z,f(f(a)))$

7. $\forall y Q(a,y)$,
   $\forall x \forall y (Q(x,y) \to Q(s(x),s(y))$
   $\vdash \exists z (Q(a,z) \wedge Q(z,s(s(a))))$

Ejercicio 7.6 [T] Demostrar mediante tableros semánticos

1. $\{\forall x [P(x) \to Q(x)], \exists x P(x)\} \vdash_{Tab} \exists x Q(x)$

2. $\{\forall x [P(x) \to Q(x)], \forall x [Q(x) \to R(x)]\} \vdash_{Tab} \forall x [P(x) \to R(x)]$

Ejercicio 7.7 [T] Refutar mediante tablero semántico

$$\forall x [P(x) \vee Q(x)] \not\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

y construir un contramodelo a partir del tablero.

Ejercicio 7.8 Demostrar todos los apartados de los ejercicios 4 y 5 mediante el procedimiento de los tableros semánticos.

Ejercicio 7.9 [Segundo parcial de 2005] Decidir, mediante tableros semánticos, si

1. $\neg \exists x P(x) \vdash \forall y [(\exists z P(z)) \to P(y)]$.

2. $\{\exists x P(x) \to \forall x Q(x)\} \vdash \forall x [P(x) \to Q(x)]$.

Ejercicio 7.10 [Examen de Junio 2005] Se sabe que:

- Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.
- Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.
- No es verdad que todo el que estudia aprueba.

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Ejercicio 7.11 Demostrar mediante deducción natural y mediante tableros semánticos cada una de las argumentaciones correctas de la relación de "*50 ejercicios de argumentación*".