Lógica informática (2006–07)

Tema 7: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez

María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Sustituciones

- Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación σ : Var $\longrightarrow$ Térm(L).
- Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por

$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$

- Ejemplo: $[x/s(0), y/x+y]$ la sustitución σ de Var en los términos de la aritmética definida por

  $\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x+y$ y $\sigma(z) = z$ para $z \in$ Var $\setminus \{x,y\}$
- Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

Aplicación de sustituciones a términos

- Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \to \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

- Ejemplo: Si $\sigma = [x/f(y,a), y/z]$, entonces
  - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
  - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y.
  - $h(a,x,w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y,a), w)$
  - $f(x,y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y,a), z)$
  - $h(a, f(x,y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x,y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y,a), z), w)$

Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación σ : Fórm$(L) \to$ Fórm(L) definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}.$$

Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
  - $$\begin{aligned}(\forall x(Q(x) \rightarrow R(x,y)))\sigma &= \forall x((Q(x) \rightarrow R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x(Q(x)\sigma_x \rightarrow R(x,y)\sigma_x) \\ &= \forall x(Q(x) \rightarrow R(x,b))\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}(Q(x) \rightarrow \forall x R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \rightarrow (\forall x R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \rightarrow \forall x(R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \rightarrow \forall x R(x,b)\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}(\forall x(Q(x) \rightarrow \forall y R(x,y)))\sigma &= \forall x((Q(x) \rightarrow \forall y R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x(Q(x)\sigma_x \rightarrow (\forall y R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x(Q(x) \rightarrow \forall y(R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= \forall x(Q(x) \rightarrow \forall y R(x,y))\end{aligned}$$

Sustituciones libres

- Def.: Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- Ejemplos:
  - $[y/x]$ no es libre para $\exists x(x < y)$
    $\exists x(x < y)[y/x] = \exists x(x < x)$
  - $[y/g(y)]$ es libre para $\forall x(P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $\forall x(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(y)] = \forall x(P(x) \to Q(x, f(g(y))))$
  - $[y/g(x)]$ no es libre para $\forall x(P(x) \to Q(x, f(y)))$
    $\forall x(P(x) \to Q(x, f(y)))[y/g(x)] = \forall x(P(x) \to Q(x, f(g(x))))$
- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F.

Regla de eliminación del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal:

  $$\frac{\forall x F}{F[x/t]} \; \forall e$$

  donde $[x/t]$ es libre para F.
- Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
- Ejemplo: $P(c), \forall x[P(x) \to \neg Q(x)] \vdash \neg Q(c)$

1	$P(c)$	premisa
2	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
3	$P(c) \to Q(c)$	$\forall$e 2
4	$Q(c)$	$\to$e $3,1$

- Nota: $\forall x \exists y(x < y) \nvdash \exists y(y < y)$.

Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad F[x/x_0] \end{array}}}{\forall x F}\ \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\wedge$i.
- Ejemplo: $\forall x[P(x) \to \neg Q(x)], \forall x P(x) \vdash \forall x \neg Q(x)$

1	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
2	$\forall x P(x)$	premisa
3	actual x_0	supuesto
4	$P(x_0) \to \neg Q(x_0)$	$\forall$e $1,3$
5	$P(x_0)$	$\forall$e $2,3$
6	$Q(x_0)$	$\to$e $4,5$
7	$\forall x \neg Q(x)$	$\forall$i $3-6$

Regla de introducción del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial:

  $$\frac{F[x/t]}{\exists x F}\ \exists i$$

  donde $[x/t]$ es libre para F.
- Nota: Analogía con $\vee$i$_1$ y $\vee$i$_2$.
- Ejemplo 3: $\forall x P(x) \vdash \exists x P(x)$

1	$\forall x P(x)$	premisa
2	$P(x_0)$	$\forall$e 1
3	$\exists x P(x)$	$\exists$i 2

Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\exists x F \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \vdots \\ & G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\vee$e.
- Ejemplo: $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$

1	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premisa
2	$\exists x P(x)$	premisa
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	$\forall$e $1,3$
5	$Q(x_0)$	$\rightarrow$e $4,3$
6	$\exists x Q(x)$	$\exists$i 5
7	$\exists x Q(x)$	$\exists$e $2,3-6$

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.

  [1(a)] $\neg\forall xF \equiv \exists x\neg F$

  [1(b)] $\neg\exists xF \equiv \forall x\neg F$

- Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.

  [2(a)] $\forall xF \wedge G \equiv \forall x(F \wedge G)$

  [2(b)] $\forall xF \vee G \equiv \forall x(F \vee G)$

  [2(c)] $\exists xF \wedge G \equiv \exists x(F \wedge G)$

  [2(d)] $\exists xF \vee G \equiv \exists x(F \vee G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [3(a)] $\forall xF \wedge \forall xG \equiv \forall x(F \wedge G)$

  [3(b)] $\exists xF \vee \exists xG \equiv \exists x(F \vee G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [4(a)] $\forall x\forall yF \equiv \forall y\forall xF$

  [4(b)] $\exists x\exists yF \equiv \exists y\exists xF$

Equivalencia 1(a) $\longrightarrow$

$\neg\forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

1	$\neg\forall x P(x)$	premisa
2	$\neg\exists x \neg P(x)$	supuesto
3	actual x_0	supuesto
4	$\neg P(x_0)$	supuesto
5	$\exists x \neg P(x)$	$\exists$i $4,3$
6	$\perp$	$\neg$e $2,5$
7	$P(x_0)$	RAA $4-6$
8	$\forall x P(x)$	$\forall$i $3-7$
9	$\perp$	$\neg$e $1,8$
10	$\exists x \neg P(x)$	RAA $2-9$

Equivalencia 1(a) $\leftarrow$

$\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

1	$\exists x \neg P(x)$	premisa
2	$\neg\neg\forall x P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, \neg P(x_0)$	supuesto
4	$\forall x P(x)$	$\neg\neg$e 2
5	$P(x_0)$	$\forall$e 4
6	$\perp$	$\neg$e $3,5$
7	$\perp$	$\exists$e $1,3-6$
8	$\neg\forall x P(x)$	RAA $2-7$

Equivalencia 1(a) $\leftrightarrow$

$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

1	$\neg\forall x P(x)$	supuesto
2	$\exists x \neg P(x)$	Lema 1(a) $\longrightarrow$
3	$\neg\forall x P(x) \rightarrow \exists x \neg P(x)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists x \neg P(x)$	supuesto
5	$\neg\forall x P(x)$	Lema 1(a) $\longleftarrow$
6	$\exists x \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x P(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Equivalencia 3(a) $\longrightarrow$

$$\forall x(P(x) \land Q(x)) \vdash \forall xP(x) \land \forall xQ(x)$$

1	$\forall x(P(x) \land Q(x))$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$P(x_0) \land Q(x_0)$	$\forall$e $1,2$
4	$P(x_0)$	$\land$e 3
5	$\forall xP(x)$	$\forall$i $2-4$
6	actual x_1	supuesto
7	$P(x_1) \land Q(x_1)$	$\forall$e $1,6$
8	$Q(x_1)$	$\land$e 7
9	$\forall xQ(x)$	$\forall$i $6-8$
10	$\forall xP(x) \land \forall xQ(x)$	$\land$i $5,9$

Equivalencia 3(a) $\leftarrow$

$$\forall x P(x) \land \forall x Q(x) \vdash \forall x (P(x) \land Q(x))$$

1	$\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$\forall x P(x)$	$\land$e 1
4	$P(x_0)$	$\forall$e $3,2$
5	$\forall x Q(x)$	$\land$e 1
6	$Q(x_0)$	$\land$e 5
7	$P(x_0) \land Q(x_0)$	$\land$i $4,6$
8	$\forall x (P(x) \land Q(x))$	$\forall$i $2-7$

Equivalencia 3(a) $\leftrightarrow$

$$\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$$

1	$\boxed{\forall x(P(x) \land Q(x))}$	supuesto
2	$\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	Lema 3(a) $\longrightarrow$
3	$\forall x(P(x) \land Q(x)) \longrightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	$\longrightarrow$i $1-2$
4	$\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	supuesto
5	$\forall x(P(x) \land Q(x))$	Lema 3(a) $\longleftarrow$
6	$\forall x P(x) \land \forall x Q(x) \longrightarrow \forall x(P(x) \land Q(x))$	$\longrightarrow$i $4-5$
7	$\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

Equivalencia 3(b) $\longrightarrow$

$\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \vdash \exists x (P(x) \lor Q(x))$

1	$\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$	premisa
2	$\exists x P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \lor Q(x_0)$	$\lor$i 3
5	$\exists x (P(x) \lor Q(x))$	$\exists$i $4, 3$
6	$\exists x (P(x) \lor Q(x))$	$\exists$e $2, 3-5$
7	$\exists x Q(x)$	supuesto
8	actual $x_1, Q(x_1)$	supuesto
9	$P(x_1) \lor Q(x_1)$	$\lor$i 8
10	$\exists x (P(x) \lor Q(x))$	$\exists$i $9, 8$
11	$\exists x (P(x) \lor Q(x))$	$\exists$e $7, 8-10$
12	$\exists x (P(x) \lor Q(x))$	$\lor$1e $, 2-6, 7-11$

Equivalencia 3(b) $\longleftarrow$

$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$

1	$\exists x(P(x) \vee Q(x))$	premisa
2	actual x_0, $P(x_0) \vee Q(x_0)$	supuesto
3	$P(x_0)$	supuesto
4	$\exists xP(x)$	$\exists$i $3, 2$
5	$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	$\vee$i 4
6	$Q(x_0)$	supuesto
7	$\exists xQ(x)$	$\exists$i $6, 2$
8	$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	$\vee$i 7
9	$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	$\vee$e $2, 3-5, 6-8$
10	$\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$	$\exists$e $1, 2-9$

Equivalencia 3(b) $\leftrightarrow$

$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \equiv \exists x (P(x) \vee Q(x))$

1	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	supuesto
2	$\exists x (P(x) \vee Q(x))$	Lema 3(b) $\longrightarrow$
3	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \rightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists x (P(x) \vee Q(x))$	supuesto
5	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	Lema 3(b) $\longleftarrow$
6	$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Equivalencia 4(b) $\longrightarrow$

$\exists x \exists y P(x,y) \vdash \exists y \exists x P(x,y)$

1	$\exists x \exists y P(x,y)$	premisa
2	actual x_0, $\exists y P(x_0,y)$	supuesto
3	actual y_0, $P(x_0,y_0)$	supuesto
4	$\exists x P(x,y_0)$	$\exists$i $3.2, 2.1$
5	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists$i $4, 3.1$
6	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists$e $2.2, 3-5$
7	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists$e $1, 2-6$

Equivalencia 4(b) $\leftrightarrow$

$\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$

1	$\exists x \exists y P(x,y)$	supuesto
2	$\exists y \exists x P(x,y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
3	$\exists x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists y \exists x P(x,y)$	supuesto
5	$\exists x \exists y P(x,y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
6	$\exists y \exists x P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y P(x,y)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\exists x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Regla de eliminación de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- Ejemplo:

1	$(x+1) = (1+x)$	premisa
2	$(x+1>1) \rightarrow (x+1>0)$	premisa
3	$(1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$	$=$e $1,2$

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	$=$e $2,1$

Regla de introducción de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:

$$\frac{}{t = t} = i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	$=$i
3	$t_2 = t_1$	$=$e $1, 2$

Tableros semánticos: Fórmulas gamma y delta

- Las fórmulas gamma, junto con sus componentes, son

$\forall x F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg\exists x F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

- Las fórmulas delta, junto con sus componentes, son

$\exists x F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg\forall x F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

Ejemplo de consecuencia mediante tablero semánticos

$$\{\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \vdash_{Tab} \exists x Q(x)$$

1 $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

2 $\exists x P(x)$

3 $\neg \exists x Q(x)$

4 $P(a)$ (2)

5 $P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)

6 $\neg P(a)$ (5)	7 $Q(a)$ (5)
Cerrada	8 $\neg Q(a)$ (3)
(6 y 4)	Cerrada
	(7 y 8)

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$\{\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \vdash_{Tab} \forall x[P(x) \rightarrow R(x)]$

1 $\quad \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

2 $\quad \forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$

3 $\quad \neg\forall x[P(x) \rightarrow R(x)]$

4 $\quad \neg(P(a) \rightarrow R(a))$ (3)

5 $\quad P(a)$ (4)

6 $\quad \neg R(a)$ (4)

7 $\quad P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)

8 $\quad Q(a) \rightarrow R(a)$ (2)

9 $\neg P(a)$ (7)

Cerrada (5–9)

10 $Q(a)$ (7)

11 $\neg Q(a)$ (8)

Cerrada (10–11)

12 $R(a)$ (8)

Cerrada (6–12)

Ejemplo de no consecuencia mediante tablero

$\forall x[P(x) \lor Q(x)] \not\models \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$

1 $\forall x[P(x) \lor Q(x)]$

2 $\neg(\forall x P(x) \lor \forall x Q(x))$

3 $\neg\forall x P(x)$ (2)

4 $\neg\forall x Q(x)$ (2)

5 $\neg P(a)$ (3)

6 $\neg Q(b)$ (4)

7 $P(a) \lor Q(a)$ (1)

8 $P(b) \lor Q(b)$ (1)

9 $P(a)$ (7) — Cerrada (5–9)

10 $Q(a)$ (7)

11 $P(b)$ (8) — Abierta

12 $Q(b)$ (8) — Cerrada (6–12)

Contramodelo: $U = \{a,b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.