

Lógica informática (2006–07)

Tema 8: Formas normales. Cláusulas

José A. Alonso Jiménez

María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional

Dpto. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Equivalencias

- Equivalencia lógica
 - ▶ Prop.: $F \equiv G \text{ syss } \models F \leftrightarrow G$.
- Propiedades básicas de la equivalencia lógica:
 - ▶ Reflexiva: $F \equiv F$
 - ▶ Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
 - ▶ Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:
 - ▶ Prop.: Si en la fórmula F_1 se sustituye una de sus subfórmulas G_1 por una fórmula G_2 lógicamente equivalente a G_1 , entonces la fórmula obtenida, F_2 , es lógicamente equivalente a F_1 .
 - ▶ Ejemplo:
$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x) \\ G_1 &= \forall x P(x) \\ G_2 &= \forall y P(y) \\ F_2 &= \forall y P(y) \rightarrow \exists x Q(x) \end{aligned}$$

Fórmula en forma rectificada

- Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
- Ejemplos: $\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(z, y)$ está en forma rectificada
 $\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y)$ no está en forma rectificada
 $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(z, x)$ no está en forma rectificada
- Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.
- Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F , entonces

$$\forall x F \equiv \forall y F[x/y]$$

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y].$$

- Ejemplos de rectificación:

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(z, x) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall u Q(z, u)$$

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall y Q(x, y) \equiv \forall z P(z) \rightarrow \forall y Q(x, y)$$

Fórmula en forma normal prenexa

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores. $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)$ se llama el **prefijo** de F y G se llama la **matriz** de F .
- Ejemplos:

Fórmula	¿FNP?
$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$	no
$\forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)]$	sí
$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$	no
$\forall x \exists y [P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\exists y \forall x [P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)])$	no
$\exists z \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge P(z)]$	sí

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias

$$\forall x F \equiv \forall y F[x/y] \quad (1)$$

$$\exists x F \equiv \exists y F[x/y] \quad (2)$$

donde y es una variable que no ocurre libre en F .

2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \quad (3)$$

3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G \quad (4)$$

Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G \quad (5)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G \quad (6)$$

$$\neg\neg F \equiv F \quad (7)$$

$$\neg\forall x F \equiv \exists x \neg F \quad (8)$$

$$\neg\exists x F \equiv \forall x \neg F \quad (9)$$

5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias

$$\forall x F \wedge G \equiv \forall x (F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (11)$$

$$\forall x F \vee G \equiv \forall x (F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (12)$$

$$\exists x F \wedge G \equiv \exists x (F \wedge G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (13)$$

$$\exists x F \vee G \equiv \exists x (F \vee G) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (14)$$

$$G \wedge \forall x F \equiv \forall x (G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (15)$$

$$G \vee \forall x F \equiv \forall x (G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (16)$$

$$G \wedge \exists x F \equiv \exists x (G \wedge F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (17)$$

$$G \vee \exists x F \equiv \exists x (G \vee F) \quad \text{con } x \text{ no libre en } G. \quad (18)$$

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo 1:
$$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$$
$$\equiv \neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall y P(y)] \quad [\text{por (1)}]$$
$$\equiv \neg \exists x [\neg P(x) \vee \forall y P(y)] \quad [\text{por (4)}]$$
$$\equiv \forall x [\neg(\neg P(x) \vee \forall y P(y))] \quad [\text{por (9)}]$$
$$\equiv \forall x [\neg \neg P(x) \wedge \neg \forall y P(y)] \quad [\text{por (6)}]$$
$$\equiv \forall x [P(x) \wedge \exists y \neg P(y)] \quad [\text{por (7 y 8)}]$$
$$\equiv \forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)] \quad [\text{por (17)}]$$
- Ejemplo 2:
$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$
$$\equiv \forall x [P(x) \vee \exists y Q(y)] \quad [\text{por (12)}]$$
$$\equiv \forall x \exists y [P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por (18)}]$$
- Ejemplo 3:
$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$
$$\equiv \exists y [\forall x P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por (18)}]$$
$$\equiv \exists y \forall x [P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por (12)}]$$

Ejemplos de cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]) \\ \equiv & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall y [Q(y) \rightarrow R(y)] \rightarrow \forall z [P(z) \rightarrow R(z)]) & [\text{por (1)}] \\ \equiv & \neg(\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \vee \forall z [\neg P(z) \vee R(z)]) & [\text{por (4)}] \\ \equiv & \neg\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \neg\forall z [\neg P(z) \vee R(z)] & [\text{por (6)}] \\ \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \exists z [\neg(\neg P(z) \vee R(z))] & [\text{por (7, 8)}] \\ \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \exists z [\neg\neg P(z) \wedge \neg R(z)] & [\text{por (6)}] \\ \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge \exists z [P(z) \wedge \neg R(z)] & [\text{por (7)}] \\ \equiv & \exists z [(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & [\text{por (17)}] \\ \equiv & \exists z [\forall x [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & [\text{por (11)}] \\ \equiv & \exists z \forall x [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge \forall y [\neg Q(y) \vee R(y)]) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & [\text{por (11)}] \\ \equiv & \exists z \forall x [\forall y [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))] \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & [\text{por (15)}] \\ \equiv & \exists z \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] & [\text{por (11)}] \end{aligned}$$

Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva

- Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:
 - ▶ Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
 1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
 2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
 - ▶ Ejemplo de cálculo de una FNPC de $\forall x \exists y [P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$:

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (19)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y [P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))] \\ \equiv & \forall x \exists y [(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \quad [\text{por (19)}] \end{aligned}$$

Fórmula en forma de Skolem

- Forma de Skolem:
 - ▶ Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_n G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
 - ▶ Ejemplos:

$\forall x \exists y P(x, y)$	no está en forma de Skolem
$\forall x P(x, f(x))$	sí está en forma de Skolem
$\exists x Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem
- Equisatisfacibilidad:
 - ▶ Def.: Las fórmulas F y G son **equisatisfacible** si:
 F es satisfacible syss G es satisfacible.
Se representa por $F \equiv_{sat} G$
 - ▶ Ejemplos:

$\exists x Q(x)$	$\equiv_{sat}$	$Q(a)$
$\exists x Q(x)$	$\not\equiv$	$Q(a)$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\equiv_{sat}$	$\forall x P(x, f(x))$
$\forall x \exists y P(x, y)$	$\not\equiv$	$\forall x P(x, f(x))$

Algoritmo de cálculo de forma de Skolem

- Propiedades:
 - ▶ Si a es una constante que no ocurre en F , entonces $\exists x F \equiv_{sat} F[x/a]$.
 - ▶ Si g es un símbolo de función n -aria que no ocurre en F , entonces $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x F \equiv_{sat} \forall x_1 \dots \forall x_n F[x/g(x_1, \dots, x_n)]$.
- Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:
 - ▶ Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es
 $Sko(F) =$
$$\begin{cases} Sko(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } \exists x G \text{ y} \\ & a \text{ es una nueva constante;} \\ Sko(\forall x_1 \dots \forall x_n G[x/f(x_1, \dots, x_n)]), & \text{si } F \text{ es } \forall x_1 \dots \forall x_n \exists x G \text{ y} \\ & f \text{ es un nuevo símbolo de función;} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$
 - ▶ Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $Sko(F)$ está en forma de Skolem y $Sko(F) \equiv_{sat} F$.

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} & \text{Sko}(\exists x \forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(x, y, z, u, v, w)) \\ &= \text{Sko}(\forall y \forall z \exists u \forall v \exists w P(a, y, z, u, v, w)) \\ &= \text{Sko}(\forall y \forall z \forall v \exists w P(a, y, z, f(y, z), v, w)) \\ &= \text{Sko}(\forall y \forall z \forall v P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))) \\ &= \forall y \forall z \forall v P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v)) \end{aligned}$$

- Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} & \text{Sko}(\forall x \exists y \forall z \exists w [\neg P(a, w) \vee Q(f(x), y)]) \\ &= \text{Sko}(\forall x \forall z \exists w [\neg P(a, w) \vee Q(f(x), h(x))]) \\ &= \text{Sko}(\forall x \forall z [\neg P(a, g(x, z)) \vee Q(f(x), h(x))]) \\ &= \forall x \forall z [\neg P(a, g(x, z)) \vee Q(f(x), h(x))] \end{aligned}$$

Ejemplos de cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$$

$$\equiv \forall x \exists y [P(x) \wedge \neg P(y)] \quad [\text{por página 7}]$$

$$\equiv_{sat} \forall x [P(x) \wedge \neg P(f(x))]$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\equiv \forall x \exists y [P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por página 7}]$$

$$\equiv_{sat} \forall x [P(x) \vee Q(f(x))]$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\equiv \exists y \forall x [P(x) \vee Q(y)] \quad [\text{por página 7}]$$

$$\equiv_{sat} \forall x [P(x) \vee Q(a)]$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$\neg (\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)])$$

$$\equiv \exists z \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad [\text{por p. 8}]$$

$$\equiv_{sat} \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))]$$

Sintaxis de la lógica clausal

- Un **átomo** es una fórmula atómica.
Variables sobre átomos: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$
- Un **literal** es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).
Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$
- Una **cláusula** es un conjunto finito de literales.
Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$
- La **cláusula vacía** es el conjunto vacío de literales.
La cláusula vacía se representa por $\square$.
- Conjuntos finitos de cláusulas.
Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$

Semántica de la lógica clausal

- Fórmulas correspondientes:
 - ▶ Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
$$\forall x_1 \dots \forall x_p [L_1 \vee \dots \vee L_n],$$
donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.
 - ▶ Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\perp$.
 - ▶ Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$ es
$$\forall x_1 \dots \forall x_p [(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)$.
 - ▶ Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- Semántica:
 - ▶ Def.: En cualquier interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\perp) = 0$.
 - ▶ Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- Def.: Una **forma clausal de una fórmula** F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
- Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que es una forma clausal de F :
 1. Sea $F_1 = \exists y_1 \dots \exists y_n F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F .
 2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página 9.
 3. Sea $F_3 = \text{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
$$\forall x_1 \dots \forall x_p [(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
 4. Sea $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$.
- Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\neg \exists x [P(x) \rightarrow \forall x P(x)]$$

$$\equiv_{sat} \forall x [P(x) \wedge \neg P(f(x))] \quad [\text{pág. 13}]$$

$$\equiv \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\equiv_{sat} \forall x [P(x) \vee Q(f(x))] \quad [\text{pág. 13}]$$

$$\equiv \{\{P(x), Q(f(x))\}\}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$$

$$\equiv_{sat} \forall x [P(x) \vee Q(a)] \quad [\text{pág. 13}]$$

$$\equiv \{\{P(x), Q(a)\}\}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$\neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow \forall x [P(x) \rightarrow R(x)])$$

$$\equiv_{sat} \forall x \forall y [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))] \quad [\text{pág. 13}]$$

$$\equiv \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$$

Ejemplos de cálculo de forma clausal de una fórmula

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \\ \equiv & \neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists y P(y) \rightarrow \exists z Q(z)) & [(2)] \\ \equiv & \neg(\neg(\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \vee \exists z Q(z)) & [(4)] \\ \equiv & \neg(\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \vee \exists z Q(z)) & [(4)] \\ \equiv & \neg\neg(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \wedge \neg\exists z Q(z) & [(6)] \\ \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \wedge \neg\exists z Q(z) & [(7)] \\ \equiv & (\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge \exists y P(y)) \wedge \forall z \neg Q(z) & [(9)] \\ \equiv & \exists y [\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)] \wedge \forall z \neg Q(z) & [(17)] \\ \equiv & \exists y [(\forall x [\neg P(x) \vee Q(x)] \wedge P(y)) \wedge \forall z \neg Q(z)] & [(13)] \\ \equiv & \exists y [\forall x [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)]] \wedge \forall z \neg Q(z) & [(11)] \\ \equiv & \exists y \forall x [((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y)) \wedge \forall z \neg Q(z)] & [(11)] \\ \equiv & \exists y \forall x \forall z [(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z)] & [(15)] \\ \equiv_{sat} & \forall x \forall z [(\neg P(x) \vee Q(x) \wedge P(a)) \wedge \neg Q(z)] & [(15)] \\ \equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} \end{aligned}$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:
 - ▶ Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacible si:
 S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$
- Forma clausal de un conjunto de fórmulas:
 - ▶ Def.: Una **forma clausal de un conjunto de fórmulas** S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S .
 - ▶ Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
 - ▶ Ejemplo: Una forma clausal de
 $\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x), \neg \exists x Q(x)\}$
es
 $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$

Consecuencia e inconsistencia de cláusulas

- Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg G$. Son equivalentes:
 1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
 2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente.
 3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
- Ejemplos:
 - ▶ Ejemplo 1:
$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$$
$$\text{syss } \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} \text{ es inconsistente.}$$
 - ▶ Ejemplo 2:
$$\{\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)], \forall x [Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models \forall x [P(x) \rightarrow R(x)]$$
$$\text{syss } \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\} \text{ es inconsistente.}$$

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
3. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional*. (UNED, 2003) pp. 101–106.
4. S. Hölldobler *Computational logic*. (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
5. R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden*. (U. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
6. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
7. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 153–160.
8. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
9. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkhäuser, 1989) pp. 51–61.