Lógica informática (2008–09)

Tema 5: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 5: Tableros semánticos

1. Tableros semánticos proposicionales

2. Tableros semánticos de primer orden

Tema 5: Tableros semánticos

1. Tableros semánticos proposicionales
   - Búsqueda de modelos
   - Notación uniforme
   - Procedimiento de completación de tableros
   - Modelos por tableros semánticos
   - Consistencia mediante tableros
   - Teorema por tableros
   - Deducción por tableros
   - Tableros en notación reducida

2. Tableros semánticos de primer orden

Búsqueda exitosa de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$

$$
\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \lor \neg q, p \land r\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p \lor \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, r, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\bot\} \text{ ó } I \models \{p, r, \neg q\}
\end{array}
$$

- Modelos de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$:
  Las interpretaciones I tales que $I(p) = 1$, $I(q) = 0$ e $I(r) = 1$.

Búsqueda exitosa de modelos por tableros semánticos

$$\boxed{\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land r))}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p \land r}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p, r}$$

$$\boxed{\neg p, p, r} \qquad \boxed{\neg q, p, r}$$

$$\boxed{\bot}$$

Búsqueda fallida de modelos

- Búsqueda de modelos de $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$.

$$
\begin{array}{ll}
 & I \models \neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q)) \\
\text{syss} & I \models \{\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\} \\
\text{syss} & I \models \{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p \vee \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{p, q, \neg p\} \text{ ó } I \models \{p, q, \neg q\} \\
\text{syss} & I \models \{\perp\} \text{ ó } I \models \{\perp\}
\end{array}
$$

- La fórmula $\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge q))$ no tiene modelos (es insatisfacible).

Búsqueda fallida de modelos por tableros semánticos

$$\boxed{\neg((\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q))}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p \land q}$$

$$\boxed{\neg p \lor \neg q, p, q}$$

$$\boxed{\neg p, p, q} \qquad \boxed{\neg q, p, q}$$

$$\boxed{\perp} \qquad \boxed{\perp}$$

Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
  - $I \models p$ syss $I(p) = 1$.
  - $I \models \neg p$ syss $I(p) = 0$.
- Dobles negaciones
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - $I \models \neg\neg G$ syss $I \models G$.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \wedge G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \vee G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.

Notación uniforme: Fórmulas alfa y beta

- Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$	$A_2 \rightarrow A_1$

- Si F es alfa con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \wedge F_2$.
- Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$B_1 \rightarrow B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \rightarrow B_2)$	$\neg(B_2 \rightarrow B_1)$

- Si F es beta con componentes F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \vee F_2$.

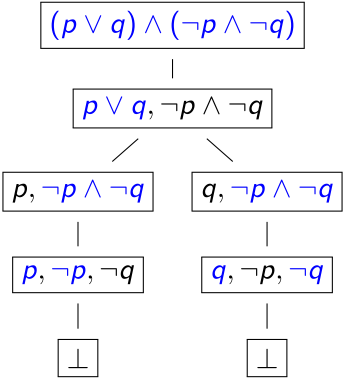
Tablero del conjunto de fórmulas S

Un tablero del conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:

- El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
- Sea $\mathcal{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathcal{T}$.
  1. Si S_1 contiene una fórmula y su negación, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $\{\perp\}$ es un tablero de S.
  2. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \smallsetminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
  3. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \smallsetminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
  4. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \smallsetminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \smallsetminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Un tablero completo de $(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$ es



No unicidad del tablero de un conjunto de fórmulas

- Otro tablero completo de $(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)$ es

$$\boxed{(p \lor q) \land (\neg p \land \neg q)}$$

$$\boxed{p \lor q, \neg p \land \neg q}$$

$$\boxed{p \lor q, \neg p, \neg q}$$

$$\boxed{p, \neg p, \neg q} \qquad \boxed{q, \neg p, \neg q}$$

$$\boxed{\perp} \qquad \boxed{\perp}$$

Modelos por tableros

- Def.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathcal{T}$ un tablero de S.
  - Una hoja de $\mathcal{T}$ es cerrada si contiene una fórmula y su negación o es de la forma $\{\bot\}$.
  - Una hoja de $\mathcal{T}$ es abierta si es un conjunto de literales y no contiene un literal y su negación.
- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S tal que todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas son cerradas.
- Reducción de modelos:
  - $I \models F \land G$ syss $I \models F$ e $I \models G$.
  - $I \models F \lor G$ syss $I \models F$ ó $I \models G$.
- Propiedades:
  1. Si las hojas de un tablero del conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son $\{G_{1,1}, \dots, G_{1,n_1}\}, \dots, \{G_{m,1}, \dots, G_{m,n_m}\}$, entonces $F_1 \land \dots \land F_n \equiv (G_{1,1} \land \dots \land G_{1,n_1}) \lor \dots \lor (G_{m,1} \land \dots \land G_{m,n_m})$.
  2. Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas, $\mathcal{T}$ un tablero de S e I una interpretación. Entonces, $I \models S$ syss existe una hoja S_1 de $\mathcal{T}$ tal que $I \models S_1$.

Consistencia mediante tableros

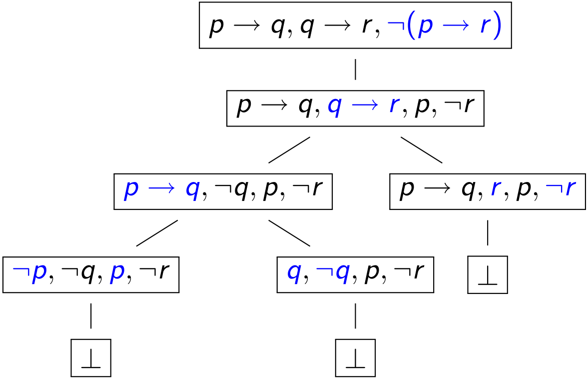
- Prop.: Si $\{p_1, \dots, p_n, \neg q_1, \dots, \neg q_m\}$ es una hoja abierta de un tablero del conjunto de fórmulas S, entonces la interpretación I tal que $I(p_1) = 1, \dots, I(p_n) = 1$, $I(q_1) = 0, \dots, I(q_m) = 0$ es un modelo de S.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es consistente syss S tiene un tablero con alguna hoja abierta.
- Prop.: Un conjunto de fórmulas S es inconsistente syss S tiene un tablero completo cerrado.

Teorema por tableros

- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado.
  Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos: $\vdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$
  $\nvdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,
  Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Rightarrow \quad \models F$
  Completo: $\models F \quad \Rightarrow \quad \vdash_{Tab} F$

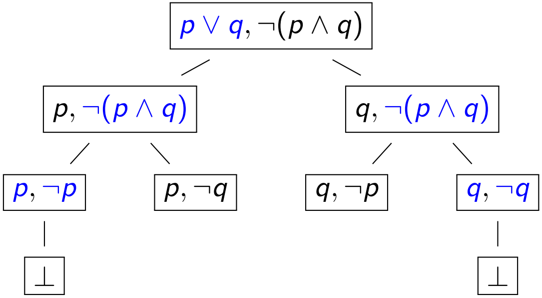
Deducción por tableros

- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$. Se representa por $S \vdash_{Tab} F$.
- Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_{Tab} p \rightarrow r$



Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$



- Contramodelos de $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$
  las interpretaciones I_1 tales que $I_1(p) = 1$ e $I_1(q) = 0$

  las interpretaciones I_2 tales que $I_2(p) = 0$ e $I_2(q) = 1$
- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Tableros en notación reducida

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \nvdash_{Tab} p \land q$

$$
\begin{array}{l}
1.\ p \lor q \\
2.\ \neg(p \land q)
\end{array}
$$

$3.\ p\ (1)$ | $4.\ q\ (1)$

$5.\ \neg p\ (2)$	$6.\ \neg q\ (2)$	$7.\ \neg p\ (2)$	$8.\ \neg q\ (2)$
Cerrada	Abierta	Abierta	Cerrada
(5,3)	$\{p, \neg q\}$	$\{\neg p, q\}$	(8,4)

Tema 5: Tableros semánticos

1. Tableros semánticos proposicionales

2. Tableros semánticos de primer orden
   - Fórmulas gamma y delta
   - Consecuencia mediante tableros semánticos

Fórmulas gamma y delta

- Las fórmulas gamma, junto con sus componentes, son

$\forall x\ F$	$F[x/t]$	(con t un término básico)
$\neg\exists x\ F$	$\neg F[x/t]$	(con t un término básico)

- Las fórmulas delta, junto con sus componentes, son

$\exists x\ F$	$F[x/a]$	(con a una nueva constante)
$\neg\forall x\ F$	$\neg F[x/a]$	(con a una nueva constante)

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$\{\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)], \exists x\ P(x)\} \vdash_{Tab} \exists x\ Q(x)$

1 $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$
2 $\exists x\ P(x)$
3 $\neg\exists x\ Q(x)$
4 $P(a)$ (2)
5 $P(a) \rightarrow Q(a)$ (1)

6 $\neg P(a)$ (5)	7 $Q(a)$ (5)
	8 $\neg Q(a)$ (3)
Cerrada (6 y 4)	Cerrada (8 y 7)

Ejemplo de consecuencia mediante tableros semánticos

$\{\forall x\,[P(x) \to Q(x)], \forall x\,[Q(x) \to R(x)]\} \vdash_{Tab} \forall x\,[P(x) \to R(x)]$

1 $\forall x\,[P(x) \to Q(x)]$
2 $\forall x\,[Q(x) \to R(x)]$
3 $\neg\forall x\,[P(x) \to R(x)]$
4 $\neg(P(a) \to R(a))$ (3)
5 $P(a)$ (4)
6 $\neg R(a)$ (4)
7 $P(a) \to Q(a)$ (1)
8 $Q(a) \to R(a)$ (2)

9 $\neg P(a)$ (7)
Cerrada (9, 5)

10 $Q(a)$ (7)

11 $\neg Q(a)$ (8)
Cerrada (11, 10)

12 $R(a)$ (8)
Cerrada (12, 6)

Ejemplo de no consecuencia mediante tablero

$\forall x\ [P(x) \lor Q(x)] \not\models \forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x)$

1 $\forall x\ [P(x) \lor Q(x)]$
2 $\neg(\forall x\ P(x) \lor \forall x\ Q(x))$
3 $\neg\forall x\ P(x)$ (2)
4 $\neg\forall x\ Q(x)$ (2)
5 $\neg P(a)$ (3)
6 $\neg Q(b)$ (4)
7 $P(a) \lor Q(a)$ (1)
8 $P(b) \lor Q(b)$ (1)

- 9 $P(a)$ (7)
  Cerrada (9,5)
- 10 $Q(a)$ (7)
  - 11 $P(b)$ (8)
    Abierta
  - 12 $Q(b)$ (8)
    Cerrada (12, 6)

Contramodelo: $U = \{a, b\}, I(P) = \{b\}, I(Q) = \{a\}$.

Bibliografía

1. Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)

   Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux

2. Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)

   Cap. 3: Semantic tableaux and resolution

3. Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)

   Cap. 7.9: Tableaux semánticos para la lógica de proposiciones

4. Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)

   Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus

5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

   Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas