Ejercicio 1 *[2 puntos] Sea F la fórmula* $\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to(\forall y(Q(y)\to R(x,y))))$ *y G la fórmula* $\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to R(x,x))$. *Demostrar por deducción natural que G es consecuencia lógica de F.*

Solución:

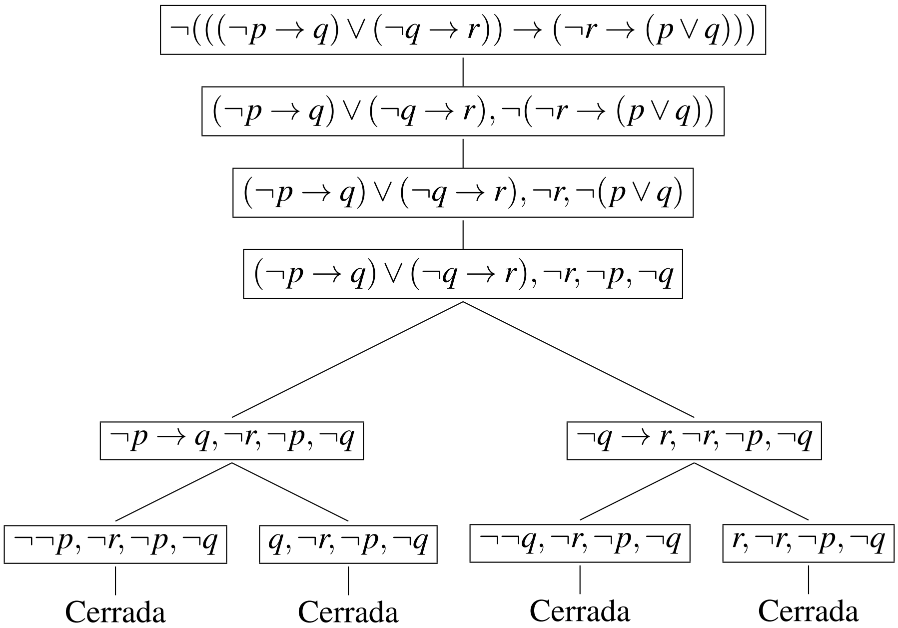
1	$\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to(\forall y(Q(y)\to R(x,y))))$	premisa
2	actual a	supuesto
3	$P(a)\wedge Q(a)$	supuesto
4	$P(a)\wedge Q(a)\to(\forall y(Q(y)\to R(a,y)))$	$\forall$e $1,2$
5	$\forall y(Q(y)\to R(a,y))$	$\to$e $4,3$
6	$Q(a)\to R(a,a)$	$\forall$e $5,2$
7	$Q(a)$	$\wedge$e 3
8	$R(a,a)$	$\to$e $6,7$
9	$P(a)\wedge Q(a)\to R(a,a)$	$\to$i $3-8$
10	$\forall x(P(x)\wedge Q(x)\to R(x,x))$	$\forall$i $2-9$

Ejercicio 2 *[2 puntos] Mediante tableros semánticos, determinar cuáles de las dos fórmulas siguientes son tautologías y calcular una forma normal conjuntiva de las que no lo sean.*

1. $((\neg p\to q)\vee(\neg q\to r))\to(\neg r\to(p\vee q))$
2. $((\neg p\to q)\vee(\neg q\to r))\to((\neg p\vee\neg q)\to r)$

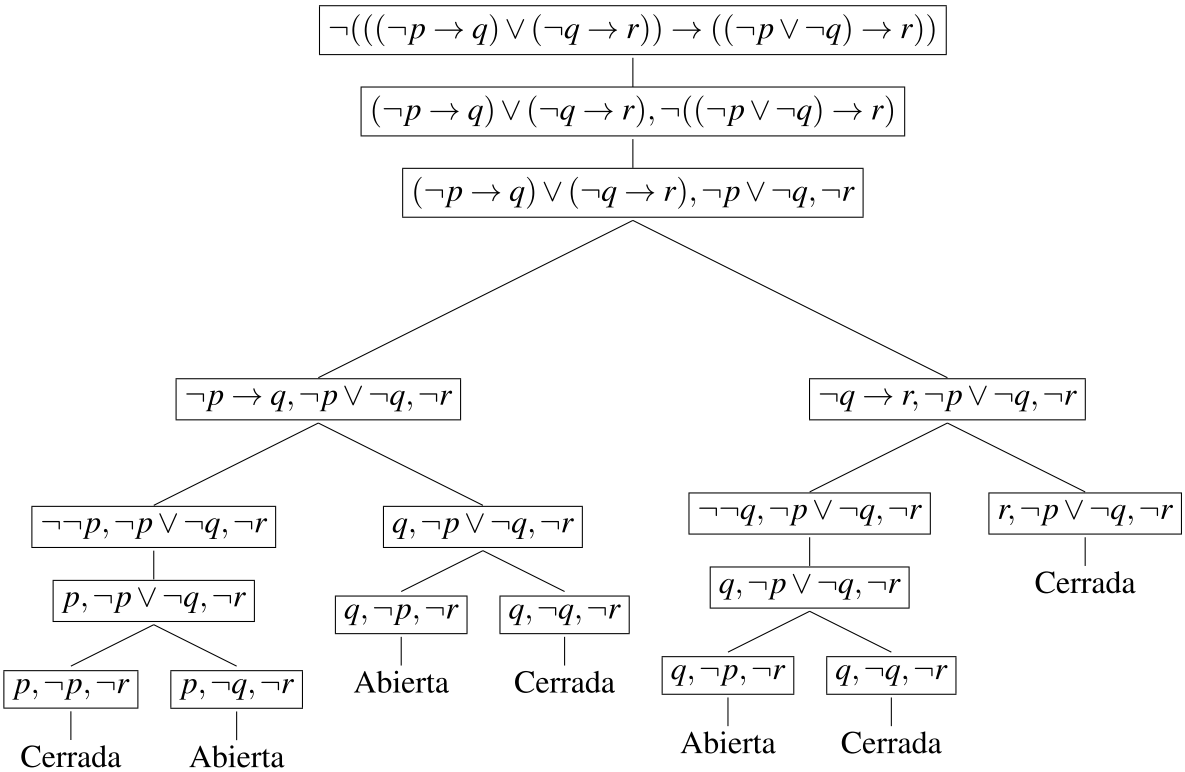
Solución:

Solución del apartado 1: El tablero semántico correspondiente a la negación de la fórmula es



Como todas las ramas son cerradas, la fórmula dada es una tautología.

Solución del apartado 2: El tablero semántico correspondiente a la negación de la fórmula es



Como hay ramas abiertas, la forma dada no es tautología.

A partir del tablero podemos calcula una forma normal conjuntiva de la fórmula dada F. La fórmula inicial del tablero es $\neg F$ y las hojas abiertas son $\{p, \neg q, \neg r\}$ y $\{q, \neg p, \neg r\}$. Por tanto,

$$\neg F \equiv (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg r)$$

Por consiguiente,

$$\neg\neg F \equiv \neg((p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg r))$$

y

$$F \equiv (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee r))$$

Una forma normal conjuntiva de la fórmula $((\neg p \to q) \vee (\neg q \to r)) \to ((\neg p \vee \neg q) \to r)$ es $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee p \vee r))$

Ejercicio 3 *[2 puntos] Decidir, mediante resolución, si el siguiente conjunto*

$$\begin{array}{l}\{\neg(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \to P(x,y)],\\ \ \neg(\exists x)(\exists y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \to (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]\}\end{array}$$

es consistente. En el caso de que lo sea, obtener un modelo a partir de la resolución.

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las fórmulas del conjunto:

La forma clausal de la primera fórmula es

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\exists y)[Q(x,y) \to P(x,y)] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg(Q(x,y) \to P(x,y)) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[Q(x,y) \wedge \neg P(x,y)] \\ \equiv & \{\{Q(x,y)\},\{\neg P(x,y)\}\} \end{array}$$

La forma clausal de la segunda fórmula es

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists x)(\exists y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \to (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)\neg((R(x,y) \vee P(x,y)) \to (\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]) \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge \neg(\forall z)(\forall w)[R(z,w) \wedge Q(z,w)]] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge (\exists z)(\exists w)\neg(R(z,w) \wedge Q(z,w))] \\ \equiv & (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists w)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge (\neg R(z,w) \vee \neg Q(z,w))] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)(\exists w)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge (\neg R(f(x,y),w) \vee \neg Q(f(x,y),w))] \\ \equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[(R(x,y) \vee P(x,y)) \wedge (\neg R(f(x,y),g(x,y)) \vee \neg Q(f(x,y),g(x,y)))] \\ \equiv & \{\{R(x,y),P(x,y)\}\},\{\neg R(f(x,y),g(x,y)),\neg Q(f(x,y),g(x,y))\}\} \end{array}$$

El conjunto es consistente si no se puede obtener la cláusula vacía por resolución a partir de las cláusulas de los elementos de S.

Los cláusulas de los elementos de S son

$$\begin{array}{ll} C_1 & := \{Q(x,y)\} \\ C_2 & := \{\neg P(x,y)\} \\ C_3 & := \{R(x,y),P(x,y)\} \\ C_4 & := \{\neg R(f(x,y),g(x,y)),\neg Q(f(x,y),g(x,y))\} \end{array}$$

Por resolución de C_2 y C_3 se obtiene

$C_5 := \{R(x,y)\}$

Por resolución de C_5 y C_4 aplicando a C_5 el renombramiento $\{x/x', y/y'\}$ y usando el unificador $\{x'/f(x,y), y'/g(x,y)\}$ se obtiene

$C_6 := \{\neg Q(f(x,y), g(x,y))\}$

Por resolución de C_6 y C_1 aplicando a C_1 el renombramiento $\{x/x', y/y'\}$ y usando el unificador $\{x'/f(x,y), y'/g(x,y)\}$ se obtiene

$C_7 := \square$

Ejercicio 4 *[2 puntos] Usar el método de DPLL para encontrar un modelo del siguiente conjunto o para demostrar que tal modelo no existe.*

$$\begin{array}{l} \{(p \wedge r) \rightarrow q, \\ \ \neg(p \wedge q \wedge r), \\ \ (r \vee \neg q) \rightarrow p, \\ \ p \rightarrow r\} \end{array}$$

Solución:

En primer lugar se calcula las formas clausales de las fórmulas del conjunto:

La forma clausal de la primera fórmula es

$$\begin{array}{ll} & (p \wedge r) \rightarrow q \\ \equiv & \neg(p \wedge r) \vee q \\ \equiv & \neg p \vee \neg r \vee q \\ \equiv & \{\{\neg p, \neg r, q\}\} \end{array}$$

La forma clausal de la segunda fórmula es

$$\begin{array}{ll} & \neg(p \wedge q \wedge r) \\ \equiv & \neg p \vee \neg q \vee \neg r \\ \equiv & \{\{\neg p, \neg q, \neg r\}\} \end{array}$$

La forma clausal de la tercera fórmula es

$$\begin{array}{ll} & (r \vee \neg q) \rightarrow p \\ \equiv & \neg(r \vee \neg q) \vee p \\ \equiv & (\neg r \wedge \neg\neg q) \vee p \\ \equiv & (\neg r \wedge q) \vee p \\ \equiv & (\neg r \vee p) \wedge (q \vee p) \\ \equiv & \{\{\neg r, p\}, \{q, p\}\} \end{array}$$

La forma clausal de la cuarta fórmula es

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow r \\ \equiv & \neg p \vee r \\ \equiv & \{\{\neg p, r\}\} \end{array}$$

Como el conjunto no tiene cláusulas unitarias ni literales puros. Elegimos el literal p para dividir los casos.

Primer caso:

$$\begin{array}{lllllllll}
\{ & \{\neg p,\neg r,q\}, & \{\neg p,\neg q,\neg r\}, & \{\neg r,p\}, & \{q,p\}, & \{\neg p,r\}, & \{p\} & \} & [\text{Unit } p] \\
\{ & \{\neg r,q\}, & \{\neg q,\neg r\}, & & & \{r\} & & \} & [\text{Unit } r] \\
\{ & \{q\}, & \{\neg q\} & & & & & \} & [\text{Unit } q] \\
\{ & & \square & & & & & \} &
\end{array}$$

Segundo caso:

$$\begin{array}{lllllllll}
\{ & \{\neg p,\neg r,q\}, & \{\neg p,\neg q,\neg r\}, & \{\neg r,p\}, & \{q,p\}, & \{\neg p,r\}, & \{\neg p\} & \} & [\text{Unit } \neg p] \\
\{ & & & \{\neg r\}, & \{q\}, & & & \} & [\text{Unit } q] \\
\{ & & & \{\neg r\} & & & & \} & [\text{Unit } \neg r] \\
\{ & & & & & & & \} &
\end{array}$$

Como hemos obtenido el conjunto vacío, el conjunto de fórmula es consistente y un modelo es I con $I(p) = 0, I(q) = 1$ e $I(r) = 0$.

Comprobación

$$\begin{array}{llllllllllllllllllllll}
(& p & \wedge & r) & \rightarrow & q, & \neg(& p & \wedge & q & \wedge & r), & (& r & \vee & \neg & q) & \rightarrow & p, & p & \rightarrow & r \\
(& 0 & 0 & 0) & 1 & 1, & 1(& 0 & \wedge & 1 & \wedge & 0), & (& 0 & 0 & 0 & 1) & 1 & 0, & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Ejercicio 5 *[2 puntos] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:*

1. *Para todo conjunto de fórmulas proposicionales S y para toda fórmula proposicional F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.*

2. *Para toda fórmula F se tiene que si G es una forma de Skolem de F entonces $\models F \leftrightarrow G$.*

Solución:

El apartado 1 es falso. Un ejemplo que lo refuta consiste en tomar como S el conjunto $\emptyset$ y como F la fórmula p.

El apartado 2 es falso. Un ejemplo que lo refuta consiste en tomar como F la fórmula $(\exists x)P(x)$ y como G la fórmula $P(a)$.