Ejercicio 1 [2,5 puntos] *Juan está matriculado en tres asignaturas, Álgebra, Lógica y Dibujo. Juan comenta que*

> Me gusta al menos una de las tres asignaturas. Si me gustase el Álgebra pero no el Dibujo, me gustaría la Lógica. O me gusta el Dibujo y la Lógica, o bien ninguna de las dos. Si me gustase el Dibujo, entonces me gustaría el Álgebra.

Los comentarios de Juan pueden formalizarse por

$$\{A \lor D \lor L, (A \land \neg D) \to L, (D \land L) \lor (\neg D \land \neg L), D \to A\}$$

Decidir, mediante resolución, si los comentarios de Juan son consistentes y, en su caso, calcular sus modelos a partir de la resolución. ¿Qué asignaturas le gustan a Juan?

Solución:

En primer lugar, calculamos las formas clausales de los comentarios.

$$A \lor D \lor L \equiv \{\{A, D, L\}\}$$

$$\begin{aligned}(A \land \neg D) \to L &\equiv \neg(A \land \neg D) \lor L \\ &\equiv (\neg A \lor \neg\neg D) \lor L \\ &\equiv (\neg A \lor D) \lor L \\ &\equiv \{\{\neg A, D, L\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(D \land L) \lor (\neg D \land \neg L) &\equiv (D \lor (\neg D \land \neg L)) \land (L \lor (\neg D \land \neg L)) \\ &\equiv ((D \lor \neg D) \land (D \lor \neg L)) \land ((L \lor \neg D) \land (L \lor \neg L)) \\ &\equiv (D \lor \neg L) \land (L \lor \neg D) \\ &\equiv \{\{D, \neg L\}, \{L, \neg D\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D \to A &\equiv \neg D \lor A \\ &\equiv \{\{\neg D, A\}\}\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que el conjunto de cláusulas obtenidas no es refutable por resolución.

*	1.	$\{A, D, L\}$	
*	2.	$\{\neg A, D, L\}$	
*	3.	$\{D, \neg L\}$	
*	4.	$\{L, \neg D\}$	
*	5.	$\{\neg D, A\}$	
*	6.	$\{D, L\}$	Resolvente de 1 y 2. Subsume a 1 y 2.
	7.	$\{L\}$	Resolvente de 6 y 3. Subsume a 6 y 3.
	8.	$\{D\}$	Resolvente de 7 y 4. Subsume a 4.
	9.	$\{A\}$	Resolvente de 8 y 5. Subsume a 5.

En este momento, las únicas cláusulas no subsumidas son la 7, 8 y 9 con las que no se pueden formar ninguna resolvente. Por tanto, el conjunto de cláusulas es consistente, los comentarios de Juan son consistentes, un modelo es la interpretación v tal que $v(A) = 1$, $v(D) = 1$ y $v(L) = 1$ y a Juan le gustan las tres asignaturas.

Ejercicio 2 [2,5 puntos] *Demostrar por resolución la verdad o falsedad de las siguientes afir-*

maciones y obtener un contramodelo de Herbrand de las que sean falsas:

1. $\forall x \exists y Q(f(x),y) \models \exists y \forall x Q(f(x),y)$
2. $\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x)) \models \forall x P(x,x)$

Solución:

Solución del apartado 1: Calculamos una forma clausal de la hipótesis:

$$\begin{array}{lll} \forall x \exists y Q(f(x),y) & \equiv_{sat} & \forall x Q(f(x),g(x)) \\ & \equiv & \{\{Q(f(x),g(x))\}\} \end{array}$$

donde g es una función de Skolem. A continuación calculamos una forma clausal de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{lll} \neg \exists y \forall x Q(f(x),y) & \equiv & \forall y \exists x \neg Q(f(x),y) \\ & \equiv_{sat} & \forall y \neg Q(f(h(y)),y) \\ & \equiv & \{\{\neg Q(f(h(y)),y)\}\} \end{array}$$

donde h es una nueva función de Skolem. Finalmente, intentamos resolver las dos cláusulas obtenidas:

1. $\{Q(f(x),g(x))\}$
2. $\{\neg Q(f(h(y)),y)\}$

No tienen ninguna resolvente, porque $Q(f(x),g(x))$ y $Q(f(h(y)),y)$ no son unificables. En efecto,

$$\begin{array}{ll} Q(f(x),g(x)) & \longrightarrow Q(f(h(y)),g(h(y))) \\ Q(f(h(y)),y) & \longrightarrow Q(f(h(y)),y) \end{array}$$

que falla porque y está contenido en $g(h(y))$.

Para obtener un contramodelo de Herbrand observamos que el universo de Herbrand se construye como sigue

$$\begin{array}{l} UH_0 = \{a\} \\ UH_1 = UH_0 \cup \{f(a),g(a),h(a)\} \\ UH_2 = UH_1 \cup \{f(f(a)),f(g(a)),f(h(a)),g(f(a)),g(g(a)),g(h(a)h(f(a)),h(g(a)),h(h(a)\} \end{array} .$$

Por tanto, el universo de Herbrand es

$$UH = \{a\} \cup \{f(u) : u \in UH\} \cup \{g(u) : u \in UH\} \cup \{h(u) : u \in UH\}$$

El contramodelo de Herbrand es $\{Q(f(u),g(u)) : u \in UH\}$.

Solución del apartado 2: Calculamos una forma clausal de la hipótesis:

$$\forall x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x)) \quad \equiv \{\{P(x,y),P(y,x)\}\}$$

A continuación calculamos una forma clausal de la negación de la conclusión

$$\begin{array}{lll} \neg \forall x P(x,x) & \equiv & \exists x \neg P(x,x) \\ & \equiv_{sat} & \neg P(a,a) \\ & \equiv & \{\{\neg P(a,a)\}\} \end{array}$$

Finalmente, intentamos resolver las dos cláusulas obtenidas:

1. $\{P(x,y), P(y,x)\}$
2. $\{\neg P(a,a)\}$
3. $\{P(a,a)\}$ resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a, y/a]$
4. $\square$ resolvente de 2 y 3

Por tanto, hemos demostrado que la afirmación es cierta.

Ejercicio 3 [2,3 puntos] *Se consideran las siguientes afirmaciones:*

a: Los charlatanes hablan con todo el mundo.
b: Los solitarios no hablan con nadie.
c: Los solitarios no son charlatanes.

Decidir por resolución si $a \wedge b \models c$.

Nota: *En la formalización usar los siguientes símbolos: $C(x)$ para representar que x es charlatán, $S(x)$ para representar que x es solitario y $H(x,y)$ para representar que x habla con y.*

Solución:

En primer lugar formalizamos y calculamos la forma clausal de las premisas y de la negación de la conclusión:

$$\begin{aligned} a : \forall x (C(x) \rightarrow \forall y H(x,y)) &\equiv \forall x (\neg C(x) \vee \forall y H(x,y)) \\ &\equiv \forall x \forall y (\neg C(x) \vee H(x,y)) \\ &\equiv \{\{\neg C(x), H(x,y)\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b : \forall x (S(x) \rightarrow \neg \exists y H(x,y)) &\equiv \forall x (\neg S(x) \vee \neg \exists y H(x,y)) \\ &\equiv \forall x (\neg S(x) \vee \forall y \neg H(x,y)) \\ &\equiv \forall x \forall y (\neg S(x) \vee \neg H(x,y)) \\ &\equiv \{\{\neg S(x), \neg H(x,y)\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg c : \neg \forall x (S(x) \rightarrow \neg C(x)) &\equiv \exists x \neg (S(x) \rightarrow \neg C(x)) \\ &\equiv \exists x (S(x) \wedge \neg\neg C(x)) \\ &\equiv \exists x (S(x) \wedge C(x)) \\ &\equiv_{sat} S(a) \wedge C(a) \\ &\equiv \{\{S(a)\}, \{C(a)\}\} \end{aligned}$$

Finalmente, hacemos la demostración por resolución:

1. $\{\neg C(x), H(x,y)\}$
2. $\{\neg S(x), \neg H(x,y)\}$
3. $\{\{S(a)\}$
4. $\{C(a)\}$
5. $\{\neg H(a,y)\}$ resolvente de 2 y 3
6. $\{H(a,y)\}$ resolvente de 1 y 4
7. $\square$ resolvente de 5 y 6

Ejercicio 4 [3 puntos] *Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *Para toda fórmula F, si G es una forma de Skolem de F entonces F y G son equivalentes.*

2. Existen cláusulas C y D tales que C es una resolvente de C y D.

Solución:

Solución del apartado 1: No es cierto ya que si F es $\exists x P(x)$ y G es $P(a)$, entonces G es una forma de Skolem de F pero G no es equivalente a F ya que (U,I) con $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$ e $I(P) = \{2\}$ es un modelo de F que no es modelo de G.

Solución del apartado 2: Si existen, por ejmplo si C y D son la cláusula $\{p, \neq p\}$, entonces la resolvente de C y D es C.