
Ejercicio 1 [4 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$

es una tautología, En el caso de que no lo sea, calcular a partir de un tablero completo sus contramodelos y una forma normal conjuntiva.

Solución:

Para calcular los contramodelos de $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$ vamos a construir un tablero completo de su negación.

1.	$\neg((p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q))$	
2.	$p \to q$	(1)
3.	$\neg((q \to \neg r) \to \neg q)$	(1)
4.	$q \to \neg r$	(3)
5.	$\neg\neg q$	(3)
6.	q	(5)

7. $\neg q$ (4)	8. $\neg r$ (4)	
Cerrada (6 y 7)	9. $\neg p$ (2)	10. q (2)
	Abierta	Abierta
	$\{\neg p, q, \neg r\}$	$\{q, \neg r\}$

Al tener ramas abiertas, la fórmula original no es una tautología y sus contramodelos son:

- v_1 tal que $v_1(p) = 0$, $v_1(q) = 1$ y $v_1(r) = 0$,
- v_2 tal que $v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$,

El segundo incluye al primero.

Sea F la fórmula dada (es decir, $(p \to q) \to ((q \to \neg r) \to \neg q)$). Una forma normal disyuntiva de $\neg F$ es $q \wedge \neg r$. Por tanto, $\neg F \equiv q \wedge \neg r$ de donde se sigue que $F \equiv \neg q \vee r$. Luego, una forma normal disyuntiva de F es $\neg q \vee r$.

Ejercicio 2 [3 puntos] *Probar, por resolución, que*
$(E \lor F) \to G \models (E \to G) \land (F \to G)$

Solución:

En primer lugar se transforma la premisa a forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & (E \lor F) \to G & \\
\equiv & \neg(E \lor F) \lor G & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg E \land \neg F) \lor G & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (\neg E \lor G) \land (\neg F \lor G) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{\neg E, G\}, \{\neg F, G\}\} &
\end{array}
$$

A continuación, se transforma la negación de la conclusión a forma clausal:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((E \to G) \land (F \to G)) & \\
\equiv & \neg((\neg E \lor G) \land (\neg F \lor G)) & \text{[por (2)]} \\
\equiv & \neg(\neg E \lor G) \lor \neg(\neg F \lor G) & \text{[por (3)]} \\
\equiv & (\neg\neg E \land \neg G) \lor (\neg\neg F \land \neg G) & \text{[por (4)]} \\
\equiv & (E \land \neg G) \lor (F \land \neg G) & \text{[por (5)]} \\
\equiv & ((E \land \neg G) \lor F) \land ((E \land \neg G) \lor \neg G) & \text{[por (6)]} \\
\equiv & ((E \lor F) \land (\neg G \lor F)) \land ((E \lor \neg G) \land (\neg G \lor \neg G)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & \{\{E, F\}, \{\neg G, F\}, \{E, \neg G\}, \{\neg G\}\} &
\end{array}
$$

Finalmente, se construye una refutación de las cláusulas obtenidas:

1	$\{\neg E, G\}$	
2	$\{\neg F, G\}$	
3	$\{E, F\}$	
4	$\{\neg G, F\}$	
5	$\{E, \neg G\}$	
6	$\{\neg G\}$	
7	$\{\neg E\}$	Resolvente de 1 y 6
8	$\{\neg F\}$	Resolvente de 2 y 6
9	$\{F\}$	Resolvente de 3 y 7
10	$\square$	Resolvente de 8 y 9

Ejercicio 3 [3 puntos] *Demostrar mediante deducción natural*

$\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

Solución:

1	$p \to q$	supuesto
2	$\neg p \to q$	supuesto
3	$\neg q$	supuesto
4	$\neg p$	MT$1,3$
5	q	$\to$e $2,4$
6	$\perp$	$\neg$e $3,5$
7	q	RAA$3-6$
8	$(\neg p \to q) \to q$	$\to$i $2-7$
9	$(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$	$\to$i $1-8$