
Ejercicio 1 [2.5 puntos] *Decidir, mediante tableros semánticos, si la fórmula*

$$p \to q \lor s$$

es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas

$$\{q \to s, \ \neg(\neg p \land q)\}$$

En el caso de que no lo sea, dar un contramodelo.

Solución:

La fórmula es consecuencia syss el conjunto

$$\{q \to s, \ \neg(\neg p \land q), \ \neg(p \to q \lor s)\}$$

tiene un tablero completo cerrado.

Como el tablero

$$\begin{array}{lll}
1. & q \to s & \\
2. & \neg(\neg p \land q) & \\
3. & \neg(p \to q \lor s) & \\
4. & p & (3) \\
5. & \neg(q \lor s) & (3) \\
6. & \neg q & (5) \\
7. & \neg s & (5)
\end{array}$$

$$8.\ \neg q \ (1) \qquad\qquad 9.\ s \ (1)$$

$$\begin{array}{lll}
10. & \neg\neg p & (2) \\
12. & p & (10) \\
 & \text{Abierta} &
\end{array}
\qquad 11.\ \neg q \ (2)$$

tiene una rama abierta, la fórmula no es consecuencia. Además, un contramodelo es la interpretación I tal que $I(p) = 1$, $I(q) = I(s) = 0$.

Ejercicio 2 [2.5 puntos] *Decidir, mediante resolución, si el siguiente conjunto es consistente*

$$\{p \lor q \to r \lor s, \ \neg(p \land \neg r \land s), \ \neg(p \to r \land s)\}$$

En el caso de que lo sea, dar un modelo.

Solución:

En primer lugar se calcula su forma clausal. La de la primera fórmula es

$$\begin{array}{ll}
 & p \lor q \to r \lor s \\
\equiv & \neg(p \lor q) \lor (r \lor s) \\
\equiv & (\neg p \land \neg q) \lor (r \lor s) \\
\equiv & (\neg p \lor r \lor s) \land (\neg q \lor r \lor s) \\
\equiv & \{\{\neg p, r, s\}, \{\neg q, r, s\}\}
\end{array}$$

La de la segunda fórmula es

$$\begin{array}{rl} & \neg(p \land \neg r \land s) \\ \equiv & \neg p \lor \neg(\neg r \land s)) \\ \equiv & \neg p \lor (\neg\neg r \lor \neg s) \\ \equiv & \neg p \lor (r \lor \neg s) \\ \equiv & \{\{\neg p, r, \neg s\}\} \end{array}$$

La de la tercera fórmula es

$$\begin{array}{rl} & \neg(p \to r \land s) \\ \equiv & p \land \neg(r \land s) \\ \equiv & p \land (\neg r \lor \neg s) \\ \equiv & \{\{p\}, \{\neg r, \neg s\}\} \end{array}$$

La resolución es

$$\begin{array}{rll} 1. & \{\neg p, r, s\} & \\ 2. & \{\neg q, r, s\} & \\ 3. & \{\neg p, r, \neg s\} & \\ 4. & \{p\} & \\ 5. & \{\neg r, \neg s\} & \\ 6. & \{r, s\} & \text{de 1 y 4} \\ 7. & \{r, \neg s\} & \text{de 3 y 4} \\ 8. & \{\neg s\} & \text{de 5 y 7} \\ 9. & \{r\} & \text{de 6 y 8} \end{array}$$

Durante la resolución las siguientes cláusulas están subsumidas: la 1 (por la 6), la 3 (por la 7), la 5 (por la 8), la 7 (por la 8), la 2 (por la 9) y la 6 (por la 9).

Como no se llega a la cláusula vacía, el conjunto es consistente y un modelo es I tal que $I(p) = I(r) = 1$, $I(s) = 0$.

Ejercicio 3 [2.5 puntos] *Demostrar, mediante deducción natural, que la siguiente fórmula es una tautología*

$$(q \to r) \to ((p \lor q) \to (p \lor r))$$

Solución:

1	$q \rightarrow r$	supuesto
2	$p \vee q$	supuesto
3	p	supuesto
4	$p \vee r$	$\vee$i 2
5	q	supuesto
6	r	$\rightarrow$e $1,5$
7	$p \vee r$	$\vee$i 6
8	$p \vee r$	$\vee$e $2,3-4,5-7$
9	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow$i $2-8$
10	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$	$\rightarrow$i $1-9$

Ejercicio 4 [2.5 puntos] *Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son correctas:*

1. *Si $S \models F$, entonces $S \cup \{F\}$ es consistente.*
2. *Si $S \models F$, entonces $S \cup \{F\}$ es inconsistente.*

Solución:

Apartado 1: Es falso, ya que si $S = \emptyset$ y F es $p \wedge \neg p$, entonces $S \models F$ pero $(S \cup \{F\}$ es inconsistente.

Apartado 2: Es falso, ya que si $S = \emptyset$ y F es $p \vee \neg p$, entonces $S \models F$ pero $(S \cup \{F\}$ es gconsistente.