

Lógica matemática y fundamentos (2012–13)

Tema 11: Modelos de Herbrand

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 11: Modelos de Herbrand

1. Modelos de Herbrand
2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

Tema 11: Modelos de Herbrand

1. Modelos de Herbrand

Reducción de la LPO básica a proposicional

Universo de Herbrand

Base de Herbrand

Interpretaciones de Herbrand

Modelos de Herbrand

2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

Reducción de la LPO básica a proposicional

- ▶ Observación:
 - ▶ En este tema sólo se consideran lenguajes de primer orden sin igualdad.
- ▶ Reducción de la LPO básica a proposicional
 - ▶ Def.: Una **fórmula básica** es una fórmula sin variables ni cuantificadores.
 - ▶ Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
 1. S es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.
 2. S es consistente en el sentido de la lógica proposicional.

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$
es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.

- $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c), \neg P(c)\}$
es inconsistente en el sentido de la lógica de primer orden.

	P^I	$P(a) \vee P(b)$	$\neg P(b) \vee P(c)$	$P(a) \rightarrow P(c)$	$\neg P(c)$
$\mathcal{I}_1$	$\emptyset$	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	$\{c^I\}$	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	$\{b^I\}$	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	$\{b^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	$\{a^I\}$	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	$\{a^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	$\{a^I, b^I\}$	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	$\{a^I, b^I, c^I\}$	1	1	1	0

Ejemplos de reducción de la LPO básica a proposicional

- ▶ $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$
es consistente en el sentido proposicional (con modelos $\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_8$).
- ▶ $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c), \neg P(c)\}$
es inconsistente en el sentido proposicional.

Se consideran los cambios $P(a)/p, P(b)/q, P(c)/r$

	p	q	r	$p \vee q$	$\neg q \vee r$	$p \rightarrow r$	$\neg r$
$\mathcal{I}_1$	0	0	0	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	0	0	1	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	0	1	0	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	0	1	1	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	1	0	0	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	1	0	1	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	1	1	0	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	1	1	1	1	1	1	0

Notación

- ▶ L representa un lenguaje de primer orden sin igualdad.
- ▶ $\mathcal{C}$ es el conjunto de constantes de L .
- ▶ $\mathcal{F}$ es el conjunto de símbolos de función de L .
- ▶ $\mathcal{R}$ es el conjunto de símbolos de relación de L .
- ▶ $\mathcal{F}_n$ es el conjunto de símbolos de función n -aria de L .
- ▶ $\mathcal{R}_n$ es el conjunto de símbolos de relación n -aria de L .
- ▶ f/n indica que f es un símbolo de función n -aria de L .
- ▶ P/n indica que f es un símbolo de relación n -aria de L .

Universo de Herbrand

- Def.: El **universo de Herbrand** de L es el conjunto de los términos básicos de L . Se representa por $\text{UH}(L)$.
- Prop.: $\text{UH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} H_i(L)$, donde $H_i(L)$ es el **nivel i** del $\text{UH}(L)$ definido por

$$H_0(L) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{si } \mathcal{C} \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{en caso contrario. (} a \text{ es una nueva constante).} \end{cases}$$

$$H_{i+1}(L) = H_i(L) \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in H_i(L)\}$$

- Prop.: $\text{UH}(L)$ es finito syss L no tiene símbolos de función.

Ejemplos de universo de Herbrand

- ▶ Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces

$$H_0(L) = \{a, b, c\}$$

$$H_1(L) = \{a, b, c\}$$

$$\vdots$$

$$UH(L) = \{a, b, c\}$$

- ▶ Si $\mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{F} = \{f/1\}$, entonces

$$H_0(L) = \{a\}$$

$$H_1(L) = \{a, f(a)\}$$

$$H_2(L) = \{a, f(a), f(f(a))\}$$

$$\vdots$$

$$UH(L) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$$

Ejemplos de universo de Herbrand

- Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/1, g/1\}$, entonces

$$H_0(L) = \{a, b\}$$

$$H_1(L) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\}$$

$$H_2(L) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\}$$

⋮

- Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/2\}$, entonces

$$H_0(L) = \{a, b\}$$

$$H_1(L) = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)\}$$

$$H_2(L) = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(a, f(a, a)), f(a, f(a, b)), \dots\}$$

⋮

Base de Herbrand

- ▶ Def.: La **base de Herbrand** de L es el conjunto de los átomos básicos de L . Se representa por $BH(L)$.
- ▶ Prop.: $BH(L) = \{P(t_1, \dots, t_n) : P \in \mathcal{R}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in UH(L)\}$.
- ▶ Prop.: $BH(L)$ es finita syss L no tiene símbolos de función.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$, entonces

$$UH(L) = \{a, b, c\}$$

$$BH(L) = \{P(a), P(b), P(c)\}$$
 - ▶ Si $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f/1\}$ y $\mathcal{R} = \{P/1, Q/1, R/1\}$, entonces

$$UH(L) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$$

$$BH(L) = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\}$$

Interpretaciones de Herbrand

- ▶ Def.: Una **interpretación de Herbrand** es una interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que
 - ▶ U es el universo de Herbrand de L ;
 - ▶ $I(c) = c$, para cada constante c de L ;
 - ▶ $I(f) = f$, para cada símbolo de función f de L .
- ▶ Prop.: Sea $\mathcal{I}$ una interpretación de Herbrand de L . Si t es un término básico de L , entonces $\mathcal{I}(t) = t$.
- ▶ Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.

Modelos de Herbrand

- ▶ Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
- ▶ Def.: Un **modelo de Herbrand de una fórmula** F es una interpretación de Herbrand de F que es modelo de F .
- ▶ Def.: Un **modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas** S es una interpretación de Herbrand de S que es modelo de S .
- ▶ Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \rightarrow P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}$, $\{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$ (ver página 5).
- ▶ Ejemplo: Sea $S = \{\forall x \forall y [Q(b, x) \rightarrow P(a) \vee R(y)], P(b) \rightarrow \neg \exists z \exists u Q(z, u)\}$.
Entonces,

$$\text{UH}(S) = \{a, b\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), R(a), R(b)\}$$
 Un modelo de Herbrand de S es $\{P(a)\}$.

Tema 11: Modelos de Herbrand

1. Modelos de Herbrand

2. Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Consistencia mediante modelos de Herbrand

Extensiones de Herbrand

Teorema de Herbrand

Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
 - └ Interpretación de Herbrand de una interpretación

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Sea $S = \{\{\neg Q(b, x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z, u)\}\}$ e
 $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$ con $a^I = 1$, $b^I = 2$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$,
 $R^I = \{2\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}^* = (\text{UH}(S), I^*)$$

$$\text{UH}(S) = \{a, b\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), R(a), R(b)\}$$

$$I^*(P(a)) = P^I(a^I) = P^I(1) = \text{V}$$

$$I^*(P(b)) = P^I(b^I) = P^I(2) = \text{F}$$

$$I^*(Q(a, a)) = Q^I(a^I, a^I) = Q^I(1, 1) = \text{V}$$

$$I^*(Q(a, b)) = Q^I(a^I, b^I) = Q^I(1, 2) = \text{F}$$

$$I^*(Q(b, a)) = Q^I(b^I, a^I) = Q^I(2, 1) = \text{F}$$

$$I^*(Q(b, b)) = Q^I(b^I, b^I) = Q^I(2, 2) = \text{V}$$

$$I^*(R(a)) = R^I(a^I) = R^I(1) = \text{F}$$

$$I^*(R(b)) = R^I(b^I) = R^I(2) = \text{V}$$

$$I^* = \{P(a), Q(a, a), Q(b, b), R(b)\} \text{ y } \mathcal{I}^* \models S.$$

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
 - └ Interpretación de Herbrand de una interpretación

Interpretación de Herbrand de una interpretación

Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\}, \{Q(y, f(a))\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$ con $a^I = 1$, $f^I = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $P^I = \{1\}$, $Q^I = \{(1, 2), (2, 2)\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}^* = (\text{UH}(S), I^*)$$

$$\text{UH}(S) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{BH}(S) = \{P(f^n(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^m(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$I^*(P(a)) = P^I(a^I) = P^I(1) = V$$

$$I^*(P(f(a))) = P^I(f^I(a^I)) = P^I(f^I(1)) = P^I(2) = F$$

$$I^*(P(f(f(a)))) = P^I(f^I(f^I(a^I))) = P^I(1) = V$$

$$I^*(P(f^n(a))) = \begin{cases} V, & \text{si } n \text{ es par;} \\ F, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$I^*(Q(f^n(a), f^m(a))) = \begin{cases} V, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ F, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$I^* = \{P(f^{2n}(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^{2m+1}(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{I}^* \models S.$$

Consistencia mediante modelos de Herbrand

- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
 1. S es consistente.
 2. S tiene un modelo de Herbrand.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Si $\mathcal{I}^*$ es una interpretación de Herbrand correspondiente a un modelo $\mathcal{I}$ de S , entonces $\mathcal{I}^*$ es un modelo de S .
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
 1. S es consistente.
 2. S tiene un modelo de Herbrand.
- ▶ Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
 1. S es inconsistente.
 2. S no tiene ningún modelo de Herbrand.
- ▶ Prop.: Existen conjuntos de fórmulas consistentes sin modelos de Herbrand.

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
 - └ Consistencia mediante modelos de Herbrand

Ejemplo de conjunto consistente sin modelos de Herbrand

- ▶ Sea $S = \{\exists x P(x), \neg P(a)\}$. Entonces,
 - ▶ S es consistente.
 - $\mathcal{I} \models S$ con $\mathcal{I} = (\{1, 2\}, I)$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$.
 - ▶ S no tiene modelos de Herbrand
 - $UH(S) = \{a\}$
 - $BH(S) = \{P(a)\}$
 - Las interpretaciones de Herbrand de S son $\emptyset$ y $\{P(a)\}$.
 - $\emptyset \not\models S$
 - $\{P(a)\} \not\models S$
 - ▶ Una forma clausal de S es $S' = \{P(b), \neg P(a)\}$.
 - ▶ Un modelo de Herbrand de S' es $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $P^I = \{b\}$.

Instancias básicas de una cláusula

- ▶ Def.: Una **sustitución** σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \rightarrow \text{Térn}(L)$.
- ▶ Def.: Sea $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cláusula de L y σ una sustitución de L . Entonces, $C\sigma = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ es una **instancia** de C .
- ▶ Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
 $C[x/a, y/f(a)] = \{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$
- ▶ Def.: $C\sigma$ es una **instancia básica** de C si todos los literales de $C\sigma$ son básicos.
- ▶ Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.

$\{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$	es una instancia básica de C .
$\{P(f(a), a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$	no es una instancia básica de C .
$\{P(x, a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$	no es una instancia básica de C .

Extensiones de Herbrand

- Def.: La **extensión de Herbrand** de un conjunto de cláusulas S es el conjunto de fórmulas

$$\text{EH}(S) = \{C\sigma : C \in S \text{ y,} \\ \text{para toda variable } x \text{ en } C, \sigma(x) \in \text{UH}(S)\}$$

- Prop.: $\text{EH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} \text{EH}_i(L)$, donde $\text{EH}_i(L)$ es el nivel i de la $\text{EH}(L)$

$$\text{EH}_i(S) = \{C\sigma : C \in S \text{ y,} \\ \text{para toda variable } x \text{ en } C, \sigma(x) \in \text{UH}_i(S)\}$$

- Ejemplos:

- Sea $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$. Entonces,

$$\text{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$$

$$\text{EH}_1(S) = \text{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$$

$$\text{EH}_2(S) = \text{EH}_1(S) \cup \{\{P(f(f(a)))\}, \{\neg P(f(f(f(a))))\}\}$$

- Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$. Entonces,

$$\text{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}.$$

- Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

Entonces,

$$\text{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}.$$

Teorema de Herbrand

- ▶ **Teorema de Herbrand:** Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
 1. S es consistente.
 2. $\text{EH}(S)$ es consistente (en el sentido proposicional).
- ▶ **Prop.:** Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces, son equivalentes
 1. S es inconsistente.
 2. $\text{EH}(S)$ tiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido proposicional).
 3. Para algún i , $\text{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional).

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
 - └ Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Entrada: Un conjunto finito de cláusulas, S .

Salida: *Inconsistente*, si S es inconsistente.

$i := 0$

bucle

si $\text{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional) **entonces**
 Devolver *Inconsistente* y terminar

en caso contrario

$i := i + 1$

fsi

fbucle

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 20) es inconsistente.

$EH_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$ es inconsistente.

1 $\{\neg P(a), Q(a)\}$

2 $\{P(a)\}$

3 $\{\neg Q(a)\}$

4 $\{Q(a)\}$ Res 1, 2

5 $\square$ Res 3, 4

- $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

$EH_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

1 $\{\neg P(a), Q(a)\}$

2 $\{\neg Q(a), R(a)\}$

3 $\{P(a)\}$

4 $\{\neg R(a)\}$

5 $\{Q(a)\}$ Res 1, 3

6 $\{R(a)\}$ Res 5, 2

7 $\square$ Res 6, 4

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
- └ Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Ejemplos de decisión mediante el teorema de Herbrand

- ▶ $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ es inconsistente (p. 20).
 - $\text{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$ es consistente
 - $\mathcal{I} = \{P(a)\} \models \text{EH}_0(S)$
 - $\text{EH}_1(S) = \text{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente.
 - 1 $\{P(f(a))\}$
 - 2 $\{\neg P(f(a))\}$
 - 3 $\square$ Res 1, 2
- ▶ $S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$ es inconsistente.
 Dem.:

$$S' = \{\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}\}$$

$$\subset \text{EH}(S)$$
 es inconsistente.
 - 1 $\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}$
 - 2 $\{P(g(b))\}$
 - 3 $\{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}$
 - 4 $\{Q(f(g(b)), g(b))\}$ Res 1, 2
 - 5 $\square$ Res 3, 3

- └ Teorema de Herbrand y decisión de la consistencia
- └ Semidecisión mediante el teorema de Herbrand

Bibliografía

1. M.L. Bonet *Apuntes de LPO*. (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 31–34.
2. C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 51–62.
3. M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 59–74.
4. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 160–169.
5. L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 47–50.
6. U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkhäuser, 1989) pp. 70–78.