Lógica matemática y fundamentos (2012–13)

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional
2. Semántica de la lógica proposicional

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional
2. Semántica de la lógica proposicional

Sintaxis de la lógica proposicional

► Sintaxis en Prolog

Usual	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
Prolog	-	&	v	=>	<=>

► Declaración de operadores:

```

:- op(610, fy, -).      % negación
:- op(620, xfy, &).    % conjunción
:- op(630, xfy, v).    % disyunción
:- op(640, xfy, =>).   % condicional
:- op(650, xfy, <=>).  % equivalencia

```

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional

2. Semántica de la lógica proposicional

Satisfacibilidad

Valores y funciones de verdad

Funciones de verdad

Valor de una fórmula en una interpretación

Interpretaciones de una fórmula

Modelo de una fórmula

Satisfacibilidad

Validez. Tautologías

Contramodelos de una fórmula

Validez. Tautologías

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Interpretaciones principales de un conjunto de fórmulas

Modelo de un conjunto de fórmulas

Cálculo de modelos de conjuntos de fórmulas

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Consecuencia lógica

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional

2. Semántica de la lógica proposicional

Satisfacibilidad

Valores y funciones de verdad

Funciones de verdad

Valor de una fórmula en una interpretación

Interpretaciones de una fórmula

Modelo de una fórmula

Satisfacibilidad

Validez. Tautologías

Contramodelos de una fórmula

Validez. Tautologías

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Interpretaciones principales de un conjunto de fórmulas

Modelo de un conjunto de fórmulas

Cálculo de modelos de conjuntos de fórmulas

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Consecuencia lógica

Valores de verdad

- ▶ Valores de verdad:
1: verdadero y 0: falso
- ▶ Def. de `valor_de_verdad`:
`valor_de_verdad(?V)` si V es un valor de verdad.

`valor_de_verdad(0).`

`valor_de_verdad(1).`

Funciones de verdad

- ▶ `función_de_verdad(+Op, +V1, +V2, -V)` se verifica si el valor de verdad de la conectiva binaria `Op` aplicada a los valores de verdad `V1` y `V2` es `V`.
- ▶ `función_de_verdad(+Op, +V1, -V)` se verifica si el valor de verdad de la conectiva unaria `Op` aplicada al valor de verdad `V1` es `V`.

```
función_de_verdad(v, 0, 0, 0) :- !.
función_de_verdad(v, _, _, 1).
función_de_verdad(&, 1, 1, 1) :- !.
función_de_verdad(&, _, _, 0).
función_de_verdad(=>, 1, 0, 0) :- !.
función_de_verdad(=>, _, _, 1).
función_de_verdad(<=>, X, X, 1) :- !.
función_de_verdad(<=>, _, _, 0).
```

```
función_de_verdad(-, 1, 0).
función_de_verdad(-, 0, 1).
```

Valor de una fórmula

- ▶ Representación de las interpretaciones
 - ▶ Listas de pares de variables y valores de verdad.
 - ▶ Ejemplo: $[(p, 1), (r, 0), (u, 1)]$
- ▶ Def. del valor de una fórmula en una interpretación:

$\text{valor}(+F, +I, -V)$ se verifica si el valor de la fórmula F en la interpretación I es V . Por ejemplo,

```
?- valor((p v q) & (-q v r), [(p,1), (q,0), (r,1)], V).
V = 1
?- valor((p v q) & (-q v r), [(p,0), (q,0), (r,1)], V).
V = 0
```

Valor de una fórmula

- ▶ Def. de valor:

```
valor(F, I, V) :-  
    memberchk((F,V), I).  
valor(-A, I, V) :-  
    valor(A, I, VA),  
    función_de_verdad(-, VA, V).  
valor(F, I, V) :-  
    F =..[Op,A,B],  
    valor(A, I, VA),  
    valor(B, I, VB),  
    función_de_verdad(Op, VA, VB, V).
```

Interpretaciones principales de una fórmula

- ▶ I es una interpretación principal de F si I es una aplicación del conjunto de los símbolos proposicionales de F en el conjunto de los valores de verdad.
- ▶ Cálculo de las interpretaciones principales:
 - ▶ `interpretaciones_fórmula(+F,-L)` se verifica si L es el conjunto de las interpretaciones principales de la fórmula F . Por ejemplo,

```
?- interpretaciones_fórmula((p v q) & (-q v r),L).
L = [[ (p, 0), (q, 0), (r, 0)],
      [ (p, 0), (q, 0), (r, 1)],
      [ (p, 0), (q, 1), (r, 0)],
      [ (p, 0), (q, 1), (r, 1)],
      [ (p, 1), (q, 0), (r, 0)],
      [ (p, 1), (q, 0), (r, 1)],
      [ (p, 1), (q, 1), (r, 0)],
      [ (p, 1), (q, 1), (r, 1)]]
```

```
interpretaciones_fórmula(F,U) :-
    findall(I,interpretación_fórmula(I,F),U).
```

Interpretación de una fórmula

- `interpretación_fórmula(?I,+F)` se verifica si `I` es una interpretación de la fórmula `F`. Por ejemplo,

```
?- interpretación_fórmula(I,(p v q) & (-q v r)).
I = [ (p, 0), (q, 0), (r, 0)] ;
I = [ (p, 0), (q, 0), (r, 1)] ;
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 0)] ;
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 1)] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 0)] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 1)] ;
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 0)] ;
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 1)] ;
No
```

```
interpretación_fórmula(I,F) :-
    símbolos_fórmula(F,U),
    interpretación_símbolos(U,I).
```

Símbolos de una fórmula

- ▶ `símbolos_fórmula(+F,?U)` se verifica si `U` es el conjunto ordenado de los símbolos proposicionales de la fórmula `F`. Por ejemplo,

```
?- símbolos_fórmula((p v q) & (-q v r), U).
U = [p, q, r]
```

```
símbolos_fórmula(F,U) :-
    símbolos_fórmula_aux(F,U1),
    sort(U1,U).
símbolos_fórmula_aux(F,[F]) :-
    atom(F).
símbolos_fórmula_aux(-F,U) :-
    símbolos_fórmula_aux(F,U).
símbolos_fórmula_aux(F,U) :-
    F =.. [_Op,A,B],
    símbolos_fórmula_aux(A,UA),
    símbolos_fórmula_aux(B,UB),
    union(UA,UB,U).
```

Interpretación de una lista de símbolos

- `interpretación_símbolos(+L,-I)` se verifica si `I` es una interpretación de la lista de símbolos proposicionales `L`. Por ejemplo,

```
?- interpretación_símbolos([p,q,r],I).
I = [ (p, 0), (q, 0), (r, 0) ] ;
I = [ (p, 0), (q, 0), (r, 1) ] ;
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 0) ] ;
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 1) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 0) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 1) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 0) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 1) ] ;
No
```

```
interpretación_símbolos([], []).
```

```
interpretación_símbolos([A|L], [(A,V)|IL]) :-
    valor_de_verdad(V),
    interpretación_símbolos(L, IL).
```

Comprobación de modelo de una fórmula

- `es_modelo_fórmula(+I,+F)` se verifica si la interpretación I es un modelo de la fórmula F. Por ejemplo,

```
?- es_modelo_fórmula([(p,1),(q,0),(r,1)],
                    (p v q) & (-q v r)).
```

Yes

```
?- es_modelo_fórmula([(p,0),(q,0),(r,1)],
                    (p v q) & (-q v r)).
```

No

```
es_modelo_fórmula(I,F) :-
    valor(F,I,V),
    V = 1.
```

Cálculo de los modelos principales de una fórmula

- `modelo_fórmula(?I,+F)` se verifica si I es un modelo principal de la fórmula F. Por ejemplo,

```
?- modelo_fórmula(I,(p v q) & (-q v r)).
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 1) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 0) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 1) ] ;
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 1) ] ;
No
```

```
modelo_fórmula(I,F) :-
    interpretación_fórmula(I,F),
    es_modelo_fórmula(I,F).
```

Cálculo de los modelos principales de una fórmula

- `modelos_fórmula(+F,-L)` se verifica si L es el conjunto de los modelos principales de la fórmula F. Por ejemplo,

```
?- modelos_fórmula((p v q) & (-q v r),L).
L = [[ (p, 0), (q, 1), (r, 1)],
      [ (p, 1), (q, 0), (r, 0)],
      [ (p, 1), (q, 0), (r, 1)],
      [ (p, 1), (q, 1), (r, 1)]]
```

```
modelos_fórmula(F,L) :-
    findall(I,modelo_fórmula(I,F),L).
```

Comprobación de satisfacibilidad

- ▶ `es_satisfacible(+F)` se verifica si la fórmula F es satisfacible.

Por ejemplo,

```
?- es_satisfacible((p v q) & (-q v r)).
```

```
Yes
```

```
?- es_satisfacible((p & q) & (p => r) & (q => -r)).
```

```
No
```

```
es_satisfacible(F) :-  
    interpretación_fórmula(I,F),  
    es_modelo_fórmula(I,F).
```

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional

2. Semántica de la lógica proposicional

Satisfacibilidad

Valores y funciones de verdad

Funciones de verdad

Valor de una fórmula en una interpretación

Interpretaciones de una fórmula

Modelo de una fórmula

Satisfacibilidad

Validez. Tautologías

Contramodelos de una fórmula

Validez. Tautologías

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Interpretaciones principales de un conjunto de fórmulas

Modelo de un conjunto de fórmulas

Cálculo de modelos de conjuntos de fórmulas

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Consecuencia lógica

Cálculo de contramodelos de una fórmula

- `contramodelo_fórmula(?I,+F)` se verifica si I es un contramodelo principal de la fórmula F. Por ejemplo,

```
?- contramodelo_fórmula(I, p <=> q).
```

```
I = [ (p, 0), (q, 1) ] ;
```

```
I = [ (p, 1), (q, 0) ] ;
```

```
No
```

```
?- contramodelo_fórmula(I, p => p).
```

```
No
```

```
contramodelo_fórmula(I,F) :-
    interpretación_fórmula(I,F),
    \+ es_modelo_fórmula(I,F).
```

Comprobación de tautologías

- ▶ `es_tautología(+F)` se verifica si la fórmula F es una tautología.

Por ejemplo,

```
?- es_tautología((p => q) v (q => p)).
```

```
Yes
```

```
?- es_tautología(p => q).
```

```
No
```

```
es_tautología(F) :-  
    \+ contramodelo_fórmula(_I,F).
```

- ▶ Definición alternativa:

```
es_tautología_alt(F) :-  
    \+ es_satisfacible(-F).
```

- └ Semántica de la lógica proposicional
 - └ Consistencia de un conjunto de fórmulas

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional
2. Semántica de la lógica proposicional

Satisfacibilidad

- Valores y funciones de verdad
- Funciones de verdad
- Valor de una fórmula en una interpretación
- Interpretaciones de una fórmula
- Modelo de una fórmula
- Satisfacibilidad

Validez. Tautologías

- Contramodelos de una fórmula
- Validez. Tautologías

Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Interpretaciones principales de un conjunto de fórmulas
- Modelo de un conjunto de fórmulas
- Cálculo de modelos de conjuntos de fórmulas
- Consistencia de un conjunto de fórmulas

Consecuencia lógica

Cálculo de las interpretaciones principales de conjuntos

- `interpretaciones_conjunto(+S,-L)` se verifica si L es el conjunto de las interpretaciones principales del conjunto S. Por ejemplo,

```
?- interpretaciones_conjunto([p => q, q=> r],U).
U = [[ (p,0), (q,0), (r,0)], [ (p,0), (q,0), (r,1)],
      [ (p,0), (q,1), (r,0)], [ (p,0), (q,1), (r,1)],
      [ (p,1), (q,0), (r,0)], [ (p,1), (q,0), (r,1)],
      [ (p,1), (q,1), (r,0)], [ (p,1), (q,1), (r,1)]]
```

```
interpretaciones_conjunto(S,U) :-
    findall(I,interpretación_conjunto(I,S),U).
```

Cálculo de las interpretaciones principales de conjuntos

- `interpretación_conjunto(?I,+S)` se verifica si I es una interpretación del conjunto de fórmulas S. Por ejemplo,

```
?- interpretación_conjunto(I,[p => q, q=> r]).
```

```
I = [ (p, 0), (q, 0), (r, 0) ] ;
```

```
I = [ (p, 0), (q, 0), (r, 1) ] ;
```

```
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 0) ] ;
```

```
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 1) ] ;
```

```
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 0) ] ;
```

```
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 1) ] ;
```

```
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 0) ] ;
```

```
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 1) ] ;
```

```
No
```

```
interpretación_conjunto(I,S) :-
    símbolos_conjunto(S,U),
    interpretación_símbolos(U,I).
```

Cálculo de los símbolos de un conjunto de fórmulas

- `símbolos_conjunto(+S,?U)` se verifica si `U` es el conjunto ordenado de los símbolos proposicionales del conjunto `S`. Por ejemplo,

```
?- símbolos_conjunto([p => q, q=> r],U).
U = [p, q, r]
```

```
símbolos_conjunto(S,U) :-
    símbolos_conjunto_aux(S,U1),
    sort(U1,U).
```

```
símbolos_conjunto_aux([], []).
símbolos_conjunto_aux([F|S],U) :-
    símbolos_fórmula(F,U1),
    símbolos_conjunto_aux(S,U2),
    union(U1,U2,U).
```

Comprobación de modelo de un conjunto de fórmulas

- `es_modelo_conjunto(+I,+S)` se verifica si la interpretación I es un modelo del conjunto de fórmulas S. Por ejemplo,

```
?- es_modelo_conjunto([(p,1),(q,0),(r,1)],
                      [(p v q) & (-q v r),q => r]).
```

Yes

```
?- es_modelo_conjunto([(p,0),(q,1),(r,0)],
                      [(p v q) & (-q v r),q => r]).
```

No

```
es_modelo_conjunto(_I, []).
es_modelo_conjunto(I, [F|S]) :-
    es_modelo_fórmula(I,F),
    es_modelo_conjunto(I,S).
```

Cálculo de los modelos principales de conjuntos de fórmulas

- `modelo_conjunto(?I,+S)` se verifica si I es un modelo principal del conjunto de fórmulas S. Por ejemplo,

```
?- modelo_conjunto(I,[(p v q) & (-q v r),p => r]).
I = [ (p, 0), (q, 1), (r, 1)] ;
I = [ (p, 1), (q, 0), (r, 1)] ;
I = [ (p, 1), (q, 1), (r, 1)] ;
No
```

```
modelo_conjunto(I,S) :-
    interpretación_conjunto(I,S),
    es_modelo_conjunto(I,S).
```

Cálculo de los modelos principales de conjuntos de fórmulas

- `modelos_conjunto(+S,-L)` se verifica si L es el conjunto de los modelos principales del conjunto de fórmulas S. Por ejemplo,

```
?- modelos_conjunto([(p v q) & (-q v r),p => r],L).
L = [[ (p, 0), (q, 1), (r, 1)],
      [ (p, 1), (q, 0), (r, 1)],
      [ (p, 1), (q, 1), (r, 1)]]
```

```
modelos_conjunto(S,L) :-
    findall(I,modelo_conjunto(I,S),L).
```

Consistencia de un conjunto de fórmulas

- **consistente(+S)** se verifica si el conjunto de fórmulas S es consistente e **inconsistente(+S)**, si es inconsistente. Por ejemplo,

```
?- consistente([(p v q) & (-q v r),p => r]).
```

```
Yes
```

```
?- consistente([(p v q) & (-q v r),p => r, -r]).
```

```
No
```

```
consistente(S) :-  
    modelo_conjunto(_I,S), !.
```

```
inconsistente(S) :-  
    \+ modelo_conjunto(_I,S).
```

Tema 14: Formalización en Prolog de la lógica proposicional

1. Sintaxis de la lógica proposicional

2. Semántica de la lógica proposicional

Satisfacibilidad

Valores y funciones de verdad

Funciones de verdad

Valor de una fórmula en una interpretación

Interpretaciones de una fórmula

Modelo de una fórmula

Satisfacibilidad

Validez. Tautologías

Contramodelos de una fórmula

Validez. Tautologías

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Interpretaciones principales de un conjunto de fórmulas

Modelo de un conjunto de fórmulas

Cálculo de modelos de conjuntos de fórmulas

Consistencia de un conjunto de fórmulas

Consecuencia lógica

Comprobación de consecuencia lógica

- ▶ `es_consecuencia(+S,+F)` se verifica si la fórmula `F` es consecuencia del conjunto de fórmulas `S`. Por ejemplo,

```
?- es_consecuencia([p => q, q => r], p => r).
```

```
Yes
```

```
?- es_consecuencia([p], p & q).
```

```
No
```

```
es_consecuencia(S,F) :-
```

```
    \+ contramodelo_consecuencia(S,F,_I).
```

Comprobación de consecuencia lógica

- `contramodelo_consecuencia(+S,+F,?I)` se verifica si I es una interpretación principal de $S \cup F$ que es modelo del conjunto de fórmulas S pero no es modelo de la fórmula F . Por ejemplo,

```
?- contramodelo_consecuencia([p], p & q, I).
```

```
I = [ (p, 1), (q, 0) ] ;
```

```
No
```

```
?- contramodelo_consecuencia([p => q, q=> r], p => r, I).
```

```
No
```

```
contramodelo_consecuencia(S,F,I) :-
    interpretación_conjunto(I,[F|S]),
    es_modelo_conjunto(I,S),
    \+ es_modelo_fórmula(I,F).
```

Comprobación de consecuencia lógica

- ▶ Definición alternativa de `es_consecuencia`

```
es_consecuencia_alt(S,F) :-  
    inconsistente([-F|S]).
```

Bibliografía

- ▶ Alonso, J.A. y Borrego, J. *Deducción automática (Vol. 1: Construcción lógica de sistemas lógicos)* (Ed. Kronos, 2002)
 - ▶ Cap. 3: Elementos de lógica proposicional
- ▶ Ben-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
 - ▶ Cap. 2: Propositional Calculus: Formulas, Models, Tableaux
- ▶ Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
- ▶ Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)