

Lógica matemática y fundamentos (2012–13)

Tema 4: Formas normales

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 4: Formas normales

1. Forma normal conjuntiva
2. Forma normal disyuntiva
3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

Tema 4: Formas normales

1. Forma normal conjuntiva

Definición de forma normal conjuntiva

Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva

Decisión de validez mediante FNC

2. Forma normal disyuntiva

3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

Forma normal conjuntiva

- ▶ Átomos y literales:
 - ▶ Def.: Un **átomo** es una variable proposicional (p.e. $p, q, \dots$).
 - ▶ Def.: Un **literal** es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \dots$).
 - ▶ Notación: $L, L_1, L_2, \dots$ representarán literales.
- ▶ Forma normal conjuntiva:
 - ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal conjuntiva (FNC)** si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma
$$(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m}).$$
 - ▶ Ejemplos: $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$ está en FNC.
 $(\neg p \vee q) \wedge (q \rightarrow p)$ no está en FNC.
 - ▶ Def.: Una fórmula G es una **forma normal conjuntiva (FNC)** de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F .
 - ▶ Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$.

Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva

Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F , $FNC(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (6)$$

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (7)$$

Ejemplos de cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$\begin{aligned} & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \\ \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) && [\text{por (2)}] \\ \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) && [\text{por (3)}] \\ \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) && [\text{por (4)}] \\ \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) && [\text{por (5)}] \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) && [\text{por (6)}] \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

$$\begin{aligned} & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \\ \equiv & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) && [\text{por (2)}] \\ \equiv & \neg p \vee q \vee \neg q \vee p \end{aligned}$$

Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

$$\begin{aligned}
 & (p \leftrightarrow q) \rightarrow r \\
 \equiv & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow r \\
 \equiv & \neg((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee r \\
 \equiv & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r \\
 \equiv & (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee r \\
 \equiv & ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p)) \vee r \\
 \equiv & ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee r \\
 \equiv & (((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p)) \vee r \\
 \equiv & (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p))) \vee r \\
 \equiv & (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee r) \wedge (((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) \\
 \equiv & (((p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg q \vee q) \vee r)) \wedge (((p \vee \neg p) \vee r) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \vee r)) \\
 \equiv & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r) \\
 \equiv & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)
 \end{aligned}$$

Procedimiento de decisión de validez mediante FNC

- ▶ Literales complementarios:

- ▶ El **complementario** de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p. \end{cases}$

- ▶ Propiedades de reducción de tautologías:

- ▶ $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ es una tautología syss $F_1, \dots, F_n$ lo son.
 - ▶ $L_1 \vee \dots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$).

- ▶ **Algoritmo de decisión de tautologías mediante FNC**

- ▶ Entrada: Una fórmula F .
 - ▶ Procedimiento:
 1. Calcular una FNC de F .
 2. Decidir si cada una de las disyunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

Ejemplos de decisión de validez mediante FNC

- ▶ $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ no es tautología:

$$\text{FNC}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

Contramodelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

I_1 tal que $I_1(p) = 1$ y $I_1(q) = 0$

I_2 tal que $I_2(p) = 1$ y $I_2(r) = 1$

- ▶ $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es tautología:

$$\text{FNC}((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) = \neg p \vee q \vee \neg q \vee p$$

- ▶ $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ no es tautología:

$$\text{FNC}((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$$

Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

I_1 tal que $I_1(p) = 0$, $I_1(q) = 0$ y $I_1(r) = 0$

I_2 tal que $I_2(p) = 1$, $I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$

Tema 4: Formas normales

1. Forma normal conjuntiva

2. Forma normal disyuntiva

Definición de forma normal disyuntiva

Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos

Definición de forma normal disyuntiva

- ▶ Def.: Una fórmula está en **forma normal disyuntiva (FND)** si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma

$$(L_{1,1} \wedge \cdots \wedge L_{1,n_1}) \vee \cdots \vee (L_{m,1} \wedge \cdots \wedge L_{m,n_m}).$$

- ▶ Ejemplos: $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ está en FND.

$$(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p) \text{ no está en FND.}$$

- ▶ Def.: Una fórmula G es una **forma normal disyuntiva (FND)** de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F .

- ▶ Ejemplo: Una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$.

Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva

Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F , $FND(F)$:

1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \quad (1)$$

2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \quad (2)$$

3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (3)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (4)$$

$$\neg\neg A \equiv A \quad (5)$$

4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (6)$$

$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \quad (7)$$

Ejemplos de cálculo de forma normal disyuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$\begin{aligned}
 & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) \\
 \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) && [\text{por (3)}] \\
 \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) && [\text{por (5)}]
 \end{aligned}$$

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$:

$$\begin{aligned}
 & \neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \\
 \equiv & \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \wedge q)) && [\text{por (2)}] \\
 \equiv & \neg\neg(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg\neg(p \wedge q) && [\text{por (4)}] \\
 \equiv & (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \wedge q) && [\text{por (5)}] \\
 \equiv & (\neg p \wedge (p \wedge q)) \vee (\neg q \wedge (p \wedge q)) && [\text{por (7)}] \\
 \equiv & (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)
 \end{aligned}$$

Procedimiento de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- ▶ Propiedades de reducción de satisfacibilidad:
 - ▶ $F_1 \vee \dots \vee F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ lo es.
 - ▶ $L_1 \wedge \dots \wedge L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \dots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- ▶ Algoritmo de decisión de satisfacibilidad mediante FND:
 - ▶ Entrada: Una fórmula F .
 - ▶ Procedimiento:
 1. Calcular una FND de F .
 2. Decidir si alguna de las conjunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND

- $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es satisfacible:

$$\text{FND}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

Modelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

I_1 tal que $I_1(p) = 0$

I_2 tal que $I_2(q) = 1$ y $I_2(r) = 0$

- $\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$ es insatisfacible:

$$\text{FND}(\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))) = (\neg p \wedge p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p \wedge q)$$

Tema 4: Formas normales

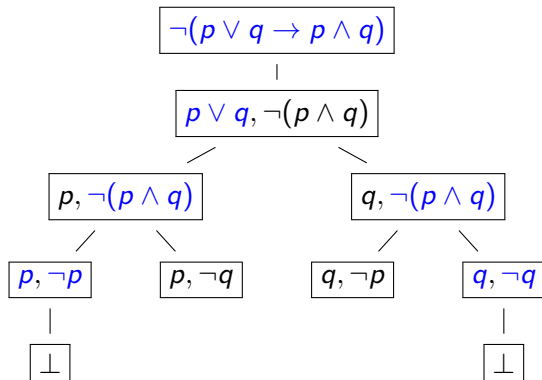
1. Forma normal conjuntiva
2. Forma normal disyuntiva
3. Cálculo de formas normales mediante tableros semánticos
 - Forma normal disyuntiva por tableros
 - Forma normal conjuntiva por tableros

Forma normal disyuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1} \wedge \dots \wedge L_{1,n_1}) \vee \dots \vee (L_{m,1} \wedge \dots \wedge L_{m,n_m})$.

Forma normal disyuntiva por tableros

- Ejemplo: Forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$.



Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ es $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.

Forma normal conjuntiva por tableros

- Prop.: Sea F una fórmula. Si las hojas abiertas de un tablero completo de $\{\neg F\}$ son $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$, entonces una forma normal conjuntiva de F es $(L_{1,1}^c \vee \dots \vee L_{1,n_1}^c) \wedge \dots \wedge (L_{m,1}^c \vee \dots \vee L_{m,n_m}^c)$.

- Ejemplo: Forma normal conjuntiva de $p \vee q \rightarrow p \wedge q$.

- Un árbol completo $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ está en la transparencia anterior.
- Una forma normal disyuntiva de $\neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q)$ es $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$.
- Una forma normal conjuntiva de $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ es $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

$$\begin{aligned}
 p \vee q \rightarrow p \wedge q &\equiv \neg \neg(p \vee q \rightarrow p \wedge q) \\
 &\equiv \neg((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \\
 &\equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p) \\
 &\equiv (\neg p \vee \neg \neg q) \wedge (\neg q \vee \neg \neg p) \\
 &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)
 \end{aligned}$$

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal*. (Ariel, 2000)
Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).
2. M. Ben-Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.)*. (Springer, 2001)
Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).
3. J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)
Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).
4. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems*. (Cambridge University Press, 2000)
Cap. 1 (Propositional logic).
5. E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
Cap. 4.4 (Formas normales).