Lógica matemática y fundamentos (2016–17)

Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones
2. Reglas de deducción natural de cuantificadores
3. Reglas de la igualdad

Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

Sustituciones

- Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \to \text{Térm}(L)$.
- Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por
$$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
- Ejemplo: $[x/s(0), y/x+y]$ es la sustitución σ de *Var* en los términos de la aritmética definida por
$$\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x + y \text{ y } \sigma(z) = z \text{ para } z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$$
- Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

Aplicación de sustituciones a términos

- Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \to \text{Térm}(L)$ definida por
$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$
- Ejemplo: Si $\sigma = [x/f(y,a), y/z]$, entonces
  - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
  - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y.
  - $h(a,x,w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y,a), w)$
  - $f(x,y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y,a), z)$
  - $h(a, f(x,y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x,y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y,a), z), w)$

Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i.
- Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \to \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y), & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}.$$

Ejemplos de aplicación de sustituciones a fórmulas

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces
  - $$\begin{aligned}(\forall x\ (Q(x) \to R(x,y)))\sigma &= \forall x\ ((Q(x) \to R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x)\sigma_x \to R(x,y)\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x) \to R(x,b))\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}(Q(x) \to \forall x\ R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \to (\forall x\ R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \to \forall x\ (R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \to \forall x\ R(x,b)\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}(\forall x\ (Q(x) \to \forall y\ R(x,y)))\sigma &= \forall x\ ((Q(x) \to \forall y\ R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x)\sigma_x \to (\forall y\ R(x,y))\sigma_x) \\ &= \forall x\ (Q(x) \to \forall y\ (R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= \forall x\ (Q(x) \to \forall y\ R(x,y))\end{aligned}$$

Sustituciones libres

- Def.: Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
- Ejemplos:
  - $[y/x]$ no es libre para $\exists x\ (x < y)$
    $\exists x\ (x < y)[y/x] = \exists x\ (x < x)$
  - $[y/g(y)]$ es libre para $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
    $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(y)]$
    $= \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(g(y))))$
  - $[y/g(x)]$ no es libre para $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
    $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(x)]$
    $= \forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x, f(g(x))))$
- Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F.

Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

Regla de eliminación del cuantificador universal

- Regla de eliminación del cuantificador universal:

$$\frac{\forall x\ F}{F[x/t]}\ \forall e$$

  donde $[x/t]$ es libre para F.
- Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.
- Ejemplo: $P(c), \forall x\ [P(x) \rightarrow \neg Q(x)] \vdash \neg Q(c)$

1	$P(c)$	premisa
2	$\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	premisa
3	$P(c) \rightarrow \neg Q(c)$	$\forall$e 2
4	$\neg Q(c)$	$\rightarrow$e 3, 1

- Nota: $\forall x\ \exists y\ (x < y) \not\vdash \exists y\ (y < y)$.

Regla de introducción del cuantificador universal

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad F[x/x_0] \end{array}}}{\forall x\ F}\ \forall i$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\wedge$i.
- $\forall x\ [P(x) \to \neg Q(x)], \forall x\ P(x) \vdash \forall x\ \neg Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \to \neg Q(x))$	premisa
2	$\forall x\ P(x)$	premisa
3	actual x_0	supuesto
4	$P(x_0) \to \neg Q(x_0)$	$\forall$e $1, 3$
5	$P(x_0)$	$\forall$e $2, 3$
6	$\neg Q(x_0)$	$\to$e $4, 5$
7	$\forall x\ \neg Q(x)$	$\forall$i $3-6$

Regla de introducción del cuantificador existencial

- Regla de introducción del cuantificador existencial:
  $$\frac{F[x/t]}{\exists x\ F}\ \exists i$$
  donde $[x/t]$ es libre para F.
- Nota: Analogía con $\vee$i$_1$ y $\vee$i$_2$.
- Ejemplo 3: $\forall x\ P(x) \vdash \exists x\ P(x)$

1	$\forall x\ P(x)$	premisa
2	$P(x_0)$	$\forall$e 1
3	$\exists x\ P(x)$	$\exists$i 2

Regla de eliminación del cuantificador existencial

$$\frac{\exists x\ F \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & F[x/x_0] \\ & \vdots \\ & G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

- Nota: Analogía con $\vee$e.
- Ejemplo: $\forall x\ [P(x) \to Q(x)], \exists x\ P(x) \vdash \exists x\ Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	premisa
2	$\exists x\ P(x)$	premisa
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto
4	$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall$e $1, 3$
5	$Q(x_0)$	$\to$e $4, 3$
6	$\exists x\ Q(x)$	$\exists$i 5
7	$\exists x\ Q(x)$	$\exists$e $2, 3-6$

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.

  [1(a)] $\neg\forall x\ F \equiv \exists x\ \neg F$
  [1(b)] $\neg\exists x\ F \equiv \forall x\ \neg F$

- Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.

  [2(a)] $\forall x\ F \land G \equiv \forall x\ (F \land G)$
  [2(b)] $\forall x\ F \lor G \equiv \forall x\ (F \lor G)$
  [2(c)] $\exists x\ F \land G \equiv \exists x\ (F \land G)$
  [2(d)] $\exists x\ F \lor G \equiv \exists x\ (F \lor G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [3(a)] $\forall x\ F \land \forall x\ G \equiv \forall x\ (F \land G)$
  [3(b)] $\exists x\ F \lor \exists x\ G \equiv \exists x\ (F \lor G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [4(a)] $\forall x\ \forall y\ F \equiv \forall y\ \forall x\ F$
  [4(b)] $\exists x\ \exists y\ F \equiv \exists y\ \exists x\ F$

Equivalencia 1(a) $\to$

$\neg\forall x\ P(x) \vdash \exists x\ \neg P(x)$

1	$\neg\forall x\ P(x)$	premisa
2	$\neg\exists x\ \neg P(x)$	supuesto
3	actual x_0	supuesto
4	$\neg P(x_0)$	supuesto
5	$\exists x\ \neg P(x)$	$\exists$i 4, 3
6	$\bot$	$\neg$e 2, 5
7	$P(x_0)$	RAA 4 – 6
8	$\forall x\ P(x)$	$\forall$i 3 – 7
9	$\bot$	$\neg$e 1, 8
10	$\exists x\ \neg P(x)$	RAA 2 – 9

Equivalencia 1(a) $\leftarrow$

$\exists x \neg P(x) \vdash \neg\forall x\, P(x)$

1	$\exists x \neg P(x)$	premisa
2	$\neg\neg\forall x\, P(x)$	supuesto
3	actual $x_0, \neg P(x_0)$	supuesto
4	$\forall x\, P(x)$	$\neg\neg$e 2
5	$P(x_0)$	$\forall$e 4
6	$\bot$	$\neg$e 3, 5
7	$\bot$	$\exists$e 1, 3 – 6
8	$\neg\forall x\, P(x)$	RAA 2 – 7

Equivalencia 1(a) $\leftrightarrow$

$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

1	$\neg\forall x\ P(x)$	supuesto
2	$\exists x\ \neg P(x)$	Lema 1(a) $\rightarrow$
3	$\neg\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists x\ \neg P(x)$	supuesto
5	$\neg\forall x\ P(x)$	Lema 1(a) $\leftarrow$
6	$\exists x\ \neg P(x) \rightarrow \neg\forall x\ P(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\neg\forall x\ P(x) \leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

Equivalencia 3(a) $\to$

$\forall x\ (P(x) \land Q(x)) \vdash \forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$

1	$\forall x\ (P(x) \land Q(x))$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$P(x_0) \land Q(x_0)$	$\forall$e $1, 2$
4	$P(x_0)$	$\land$e$_1$ 3
5	$\forall x\ P(x)$	$\forall$i $2-4$
6	actual x_1	supuesto
7	$P(x_1) \land Q(x_1)$	$\forall$e $1, 6$
8	$Q(x_1)$	$\land$e$_2$ 7
9	$\forall x\ Q(x)$	$\forall$i $6-8$
10	$\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$	$\land$i $5, 9$

Equivalencia 3(a) $\leftarrow$

$\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x) \vdash \forall x\ (P(x) \land Q(x))$

1	$\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$	premisa
2	actual x_0	supuesto
3	$\forall x\ P(x)$	$\land e_1$ 1
4	$P(x_0)$	$\forall e$ 3, 2
5	$\forall x\ Q(x)$	$\land e_2$ 1
6	$Q(x_0)$	$\forall e$ 5
7	$P(x_0) \land Q(x_0)$	$\land i$ 4, 6
8	$\forall x\ (P(x) \land Q(x))$	$\forall i$ 2 − 7

Equivalencia 3(a) $\leftrightarrow$

$\forall x\, (P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$

1	$\forall x\, (P(x) \land Q(x))$	supuesto
2	$\forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$	Lema 3(a) $\rightarrow$
3	$\forall x\, (P(x) \land Q(x)) \rightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$	supuesto
5	$\forall x\, (P(x) \land Q(x))$	Lema 3(a) $\leftarrow$
6	$\forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\, (P(x) \land Q(x))$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\forall x\, (P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

Equivalencia 3(b) $\rightarrow$

$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \vdash \exists x\ (P(x) \vee Q(x))$

1	$\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$			premisa
2	$\exists x\ P(x)$	supuesto	$\exists x\ Q(x)$	supuesto
3	actual $x_0, P(x_0)$	supuesto	actual $x_1, Q(x_1)$	supuesto
4	$P(x_0) \vee Q(x_0)$	$\vee i_1\ 3$	$P(x_1) \vee Q(x_1)$	$\vee i_2\ 3'$
5	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists i\ 4, 3$	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists i\ 3', 4'$
6	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists e\ 2, 3-5$	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$	$\exists e\ 2', 3'-5'$
7	$\exists x\ (P(x) \vee Q(x))$			$\vee 1e\ , 2-6, 2'-6'$

Equivalencia 3(b) $\leftarrow$

$\exists x\ (P(x) \lor Q(x)) \vdash \exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$

1	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	premisa
2	actual x_0, $P(x_0) \lor Q(x_0)$	supuesto
3	$P(x_0)$	supuesto
4	$\exists x\ P(x)$	$\exists$i $3, 2$
5	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	$\lor$i$_1$ 4
6	$Q(x_0)$	supuesto
7	$\exists x\ Q(x)$	$\exists$i $6, 2$
8	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	$\lor$i$_2$ 7
9	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	$\lor$e $2, 3-5, 6-8$
10	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	$\exists$e $1, 2-9$

Equivalencia 3(b) $\leftrightarrow$

$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x) \equiv \exists x\ (P(x) \lor Q(x))$

1	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	supuesto
2	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	Lema 3(b) $\rightarrow$
3	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x) \rightarrow \exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	supuesto
5	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	Lema 3(b) $\leftarrow$
6	$\exists x\ (P(x) \lor Q(x)) \rightarrow \exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x) \leftrightarrow \exists x\ (P(x) \lor Q(x))$	$\leftrightarrow$i $3, 6$

Equivalencia 4(b) $\to$

$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \vdash \exists y\ \exists x\ P(x,y)$

1	$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$	premisa
2	actual x_0, $\exists y\ P(x_0,y)$	supuesto
3	actual y_0, $P(x_0,y_0)$	supuesto
4	$\exists x\ P(x,y_0)$	$\exists$i 3,2, 2,1
5	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists$i 4, 3,1
6	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists$e 2,2, $3-5$
7	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\exists$e 1, $2-6$

Equivalencia 4(b) $\leftrightarrow$

$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ P(x,y)$

1	$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$	supuesto
2	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
3	$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\rightarrow$i $1-2$
4	$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$	supuesto
5	$\exists x\ \exists y\ P(x,y)$	Lema 4(b) $\rightarrow$
6	$\exists y\ \exists x\ P(x,y) \rightarrow \exists x\ \exists y\ P(x,y)$	$\rightarrow$i $4-5$
7	$\exists x\ \exists y\ P(x,y) \leftrightarrow \exists y\ \exists x\ P(x,y)$	$\leftrightarrow$i $3,6$

Tema 8: Deducción natural en lógica de primer orden

1. Sustituciones

2. Reglas de deducción natural de cuantificadores

3. Reglas de la igualdad
   - Regla de eliminación de la igualdad
   - Regla de introducción de la igualdad

Regla de eliminación de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:

$$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- Ejemplo:

1	$(x+1) = (1+x)$	premisa
2	$(x+1>1) \rightarrow (x+1>0)$	premisa
3	$(1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$	=e $1, 2$

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	=e $2, 1$

Regla de introducción de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:
$$\frac{}{t = t} = i$$
- Ejemplo: $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	=i
3	$t_2 = t_1$	=e 1, 2

Bibliografía

1. C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
2. R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
3. J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
4. J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
5. M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.