

Tema 8: Funciones de orden superior

Programación declarativa (2009–10)

José A. Alonso Jiménez

Grupo de Lógica Computacional
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Sevilla

IM Tema 8: Funciones de orden superior

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
 - La función `map`
 - La función `filter`
3. Función de plegado por la derecha: `foldr`
4. Función de plegado por la izquierda: `foldl`
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas
 - Cambio de bases
 - Codificación y decodificación

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
3. Función de plegado por la derecha: `foldr`
4. Función de plegado por la izquierda: `foldl`
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

Funciones de orden superior

- ▶ Una función es **de orden superior** si toma una función como argumento o devuelve una función como resultado.
- ▶ `(dosVeces f x)` es el resultado de aplicar `f` a `f x`. Por ejemplo,

```
dosVeces (*3) 2           ~> 18
dosVeces reverse [2,5,7] ~> [2,5,7]
```

```
dosVeces :: (a -> a) -> a -> a
dosVeces f x = f (f x)
```

- ▶ Prop: `dosVeces reverse = id`
donde `id` es la función identidad.

```
id :: a -> a
id x = x
```

Usos de las funciones de orden superior

- ▶ Definición de patrones de programación.
 - ▶ Aplicación de una función a todos los elementos de una lista.
 - ▶ Filtrado de listas por propiedades.
 - ▶ Patrones de recursión sobre listas.
- ▶ Diseño de lenguajes de dominio específico:
 - ▶ Lenguajes para procesamiento de mensajes.
 - ▶ Analizadores sintácticos.
 - ▶ Procedimientos de entrada/salida.
- ▶ Uso de las propiedades algebraicas de las funciones de orden superior para razonar sobre programas.

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
 - La función `map`
 - La función `filter`
3. Función de plegado por la derecha: `foldr`
4. Función de plegado por la izquierda: `foldl`
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

La función map: Definición

- ▶ `(map f xs)` es la lista obtenida aplicando `f` a cada elemento de `xs`. Por ejemplo,

```
map (*2) [3,4,7]    ~> [6,8,14]
map sqrt [1,2,4]   ~> [1.0,1.4142135623731,2.0]
map even [1..5]    ~> [False,True,False,True,False]
```

- ▶ Definición de map por comprensión:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f xs = [f x | x <- xs]
```

- ▶ Definición de map por recursión:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map _ []      = []
map f (x:xs) = f x : map f xs
```

7 / 41

Relación entre sum y map

- ▶ La función sum:

```
sum :: [Int] -> Int
sum []      = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

- ▶ Propiedad: `sum (map (2*) xs) = 2 * sum xs`
- ▶ Comprobación con QuickCheck:

```
prop_sum_map :: [Int] -> Bool
prop_sum_map xs = sum (map (2*) xs) == 2 * sum xs
```

```
*Main> quickCheck prop_sum_map
+++ OK, passed 100 tests.
```

8 / 41

Relación entre sum y map

Demostración de la propiedad por inducción en xs

► Caso []:

$$\begin{aligned}
 & \text{sum (map (2*) xs)} \\
 &= \text{sum (map (2*) [])} && \text{[por hipótesis]} \\
 &= \text{sum []} && \text{[por map.1]} \\
 &= 0 && \text{[por sum.1]} \\
 &= 2 * 0 && \text{[por aritmética]} \\
 &= 2 * \text{sum []} && \text{[por sum.1]} \\
 &= 2 * \text{sum xs} && \text{[por hipótesis]}
 \end{aligned}$$

Relación entre sum y map

► Caso xs=(y:ys): Entonces,

$$\begin{aligned}
 & \text{sum (map (2*) xs)} \\
 &= \text{sum (map (2*) (y:ys))} && \text{[por hipótesis]} \\
 &= \text{sum (2*) y : (map (2*) ys)} && \text{[por map.2]} \\
 &= (2*) y + (\text{sum (map (2*) ys)}) && \text{[por sum.2]} \\
 &= (2*) y + (2 * \text{sum ys}) && \text{[por hip. de inducción]} \\
 &= (2 * y) + (2 * \text{sum ys}) && \text{[por (2*)]} \\
 &= 2 * (y + \text{sum ys}) && \text{[por aritmética]} \\
 &= 2 * \text{sum (y:ys)} && \text{[por sum.2]} \\
 &= 2 * \text{sum xs} && \text{[por hipótesis]}
 \end{aligned}$$

Comprobación de propiedades con argumentos funcionales

- ▶ La aplicación de una función a los elementos de una lista conserva su longitud:

```
prop_map_length (Function _ f) xs =
  length (map f xs) == length xs
```

- ▶ En el inicio del fichero hay que escribir

```
import Test.QuickCheck.Function
```

- ▶ Comprobación

```
*Main> quickCheck prop_map_length
+++ OK, passed 100 tests.
```

La función filter

- ▶ `filter p xs` es la lista de los elementos de `xs` que cumplen la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
filter even [1,3,5,4,2,6,1] ~> [4,2,6]
filter (>3) [1,3,5,4,2,6,1] ~> [5,4,6]
```

- ▶ Definición de `filter` por comprensión:

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p xs = [x | x <- xs, p x]
```

- ▶ Definición de `filter` por recursión:

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter _ [] = []
filter p (x:xs) | p x = x : filter p xs
                | otherwise = filter p xs
```

Uso conjunto de `map` y `filter`

- ▶ `sumaCuadradosPares xs` es la suma de los cuadrados de los números pares de la lista `xs`. Por ejemplo,

```
| sumaCuadradosPares [1..5]  ~> 20
```

```
sumaCuadradosPares :: [Int] -> Int
```

```
sumaCuadradosPares xs = sum (map (^2) (filter even xs))
```

- ▶ Definición por comprensión:

```
sumaCuadradosPares' :: [Int] -> Int
```

```
sumaCuadradosPares' xs = sum [x^2 | x <- xs, even x]
```

Predefinidas de orden superior para procesar listas

- ▶ `all p xs` se verifica si todos los elementos de `xs` cumplen la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
| all odd [1,3,5]  ~> True
```

```
| all odd [1,3,6]  ~> False
```

- ▶ `any p xs` se verifica si algún elemento de `xs` cumple la propiedad `p`. Por ejemplo,

```
| any odd [1,3,5]  ~> True
```

```
| any odd [2,4,6]  ~> False
```

- ▶ `takeWhile p xs` es la lista de los elementos iniciales de `xs` que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

```
| takeWhile even [2,4,6,7,8,9] ~> [2,4,6]
```

- ▶ `dropWhile p xs` es la lista `xs` sin los elementos iniciales que verifican el predicado `p`. Por ejemplo,

```
| dropWhile even [2,4,6,7,8,9] ~> [7,8,9]
```

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
3. Función de plegado por la derecha: foldr
4. Función de plegado por la izquierda: foldl
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

Esquema básico de recursión sobre listas

- ▶ Ejemplos de definiciones recursivas:

```
----- Prelude -----  
sum []           = 0  
sum (x:xs)       = x + sum xs  
product []       = 1  
product (x:xs)  = x * product xs  
or []            = False  
or (x:xs)       = x || or xs  
and []          = True  
and (x:xs)      = x && and xs  
-----
```

- ▶ Esquema básico de recursión sobre listas:

```
-----  
f []            = v  
f (x:xs)       = x 'op' (f xs)  
-----
```

El patrón foldr

- Redefiniciones con el patrón foldr

```
sum      = foldr (+) 0
product = foldr (*) 1
or       = foldr (||) False
and      = foldr (&&) True
```

- Definición del patrón foldr

```
                                Prelude
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr f v []      = v
foldr f v (x:xs) = f x (foldr f v xs)
```

Visión no recursiva de foldr

- Cálculo con sum:

sum [2,3,5]	
= foldr (+) 0 [2,3,5]	[def. de sum]
= foldr (+) 0 2:(3:(5:[]))	[notación de lista]
= 2+(3+(5+0))	[sustituir (:) por (+) y [] por 0]
= 10	[aritmética]
- Cálculo con product:

product [2,3,5]	
= foldr (*) 1 [2,3,5]	[def. de sum]
= foldr (*) 1 2:(3:(5:[]))	[notación de lista]
= 2*(3*(5*1))	[sustituir (:) por (*) y [] por 1]
= 30	[aritmética]
- Cálculo de foldr f v xs
Sustituir en xs los (:) por f y [] por v.

Definición de la longitud mediante foldr

- ▶ Ejemplo de cálculo de la longitud:

```

longitud [2,3,5]
= longitud 2:(3:(5:[]))
=          1+(1+(1+0))    [Sustituciones]
= 3

```

- ▶ Sustituciones:
 - ▶ los (:) por ($\backslash _ n \rightarrow 1+n$)
 - ▶ la [] por 0
- ▶ Definición de length usando foldr

```

longitud :: [a] -> Int
longitud = foldr (\ _ n -> 1+n) 0

```

Definición de la inversa mediante foldr

- ▶ Ejemplo de cálculo de la inversa:

```

inversa [2,3,5]
= inversa 2:(3:(5:[]))
=          (([] ++ [5]) ++ [3]) ++ [2]    [Sustituciones]
= [5,3,2]

```

- ▶ Sustituciones:
 - ▶ los (:) por ($\backslash x \ xs \rightarrow xs \ ++ \ [x]$)
 - ▶ la [] por []
- ▶ Definición de inversa usando foldr

```

inversa :: [a] -> [a]
inversa = foldr (\ x xs -> xs ++ [x]) []

```

```

conc xs ys = (foldr (:) ys) xs

```

Definición de la concatenación mediante `foldr`

- ▶ Ejemplo de cálculo de la concatenación:

```
conc [2,3,5] [7,9]
= conc 2:(3:(5:[])) [7,9]
=      2:(3:(5:[7,9]))      [Sustituciones]
= [2,3,5,7,9]
```

- ▶ Sustituciones:

- ▶ los `(:)` por `(:)`
- ▶ la `[]` por `ys`

- ▶ Definición de `conc` usando `foldr`

```
conc xs ys = (foldr (:) ys) xs
```

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
3. Función de plegado por la derecha: `foldr`
4. Función de plegado por la izquierda: `foldl`
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

Definición de suma de lista con acumuladores

- Definición de suma con acumuladores:

```
suma :: [Integer] -> Integer
suma = sumaAux 0
  where sumaAux v []      = v
        sumaAux v (x:xs) = sumaAux (v+x) xs
```

- Cálculo con suma:

```
suma [2,3,7] = sumaAux 0 [2,3,7]
             = sumaAux (0+2) [3,7]
             = sumaAux 2 [3,7]
             = sumaAux (2+3) [7]
             = sumaAux 5 [7]
             = sumaAux (5+7) []
             = sumaAux 12 []
             = 12
```

23 / 41

Patrón de definición de recursión con acumulador

- Patrón de definición (generalización de sumaAux):

```
f v []      = v
f v (x:xs) = f (v*x) xs
```

- Definición con el patrón foldl:

```
suma      = foldl (+) 0
product  = foldl (*) 1
or        = foldl (||) False
and       = foldl (&&) True
```

24 / 41

Definición de foldl

► Definición de foldl:

```
----- Prelude -----  
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b ] -> a  
foldl f v []      = v  
foldl f v (x:xs) = foldl f (f v x ) xs
```

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
3. Función de plegado por la derecha: foldr
4. Función de plegado por la izquierda: foldl
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

Composición de funciones

- Definición de la composición de dos funciones:

```

----- Prelude -----
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
f . g = \x -> f (g x)

```

- Uso de composición para simplificar definiciones:

- Definiciones sin composición:

```

-----
par n                = not (impar n)
doVeces f x         = f (f x )
sumaCuadradosPares ns = sum (map (^2) (filter even ns))

```

- Definiciones con composición:

```

-----
par                = not . impar
dosVeces f         = f . f
sumaCuadradosPares = sum . map (^2) . filter even

```

27 / 41

Composición de una lista de funciones

- La función identidad:

```

----- Prelude -----
id :: a -> a
id = \x -> x

```

- (`composicionLista fs`) es la composición de la lista de funciones `fs`. Por ejemplo,

```

| composicionLista [(*) , (^2)] 3    ~> 18
| composicionLista [ (^2) , (*) ] 3  ~> 36
| composicionLista [(/9) , (^2) , (*)] 3 ~> 4.0

```

```

-----
composicionLista :: [a -> a] -> (a -> a)
composicionLista = foldr (.) id

```

Tema 8: Funciones de orden superior

1. Funciones de orden superior
2. Procesamiento de listas
3. Función de plegado por la derecha: `foldr`
4. Función de plegado por la izquierda: `foldl`
5. Composición de funciones
6. Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas
Cambio de bases
Codificación y decodificación

29 / 41

Caso de estudio: Codificación binaria y transmisión de cadenas

- ▶ Objetivos:
 1. Definir una función que convierta una cadena en una lista de ceros y unos junto con otra función que realice la conversión opuesta.
 2. Simular la transmisión de cadenas mediante ceros y unos.
- ▶ Los números binarios se representan mediante listas de bits en orden inverso. Un bit es cero o uno. Por ejemplo, el número 1101 se representa por `[1,0,1,1]`.
- ▶ El tipo `Bit` es el de los bits.

```
type Bit = Int
```

30 / 41

Cambio de bases: De binario a decimal

- `(bin2int x)` es el número decimal correspondiente al número binario `x`. Por ejemplo,

```
| bin2int [1,0,1,1]  ~>  13
```

```
bin2int :: [Bit] -> Int
bin2int = foldr (\x y -> x + 2*y) 0
```

Por ejemplo,

```
| bin2int [1,0,1,1]
= bin2int 1:(0:(1:(1:[])))
=          1+2*(0+2*(1+2*(1+2*0)))
= 13
```

Cambio de base: De decimal a binario

- `(int2bin x)` es el número binario correspondiente al número decimal `x`. Por ejemplo,

```
| int2bin 13  ~>  [1,0,1,1]
```

```
int2bin :: Int -> [Bit]
int2bin 0 = []
int2bin n = n `mod` 2 : int2bin (n `div` 2)
```

Por ejemplo,

```
| int2bin 13
= 13 `mod` 2 : int2bin (13 `div` 2)
= 1 : int2bin (6 `div` 2)
= 1 : (6 `mod` 2 : int2bin (6 `div` 2))
= 1 : (0 : int2bin 3)
= 1 : (0 : (3 `mod` 2 : int2bin (3 `div` 2)))
= 1 : (0 : (1 : int2bin 1))
= 1 : (0 : (1 : (1 : int2bin 0)))
= 1 : (0 : (1 : (1 : [])))
= [1,0,1,1]
```

Cambio de base: Comprobación de propiedades

- Propiedad: Al pasar un número natural a binario con `int2bin` y el resultado a decimal con `bin2int` se obtiene el número inicial.

```
prop_int_bin :: Int -> Bool
prop_int_bin x =
    bin2int (int2bin x) == x
  where y = abs x
```

- Comprobación:

```
*Main> quickCheck prop_int_bin
+++ OK, passed 100 tests.
```

Creación de octetos

- Un octeto es un grupo de ocho bits.
- (`creaOcteto bs`) es el octeto correspondiente a la lista de bits `bs`; es decir, los 8 primeros elementos de `bs` si su longitud es mayor o igual que 8 y la lista de 8 elementos añadiendo ceros al final de `bs` en caso contrario. Por ejemplo,

```
Main*> creaOcteto [1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,0]
[1,0,1,1,0,0,1,1]
Main*> creaOcteto [1,0,1,1]
[1,0,1,1,0,0,0,0]
```

```
creaOcteto :: [Bit] -> [Bit]
creaOcteto bs = take 8 (bs ++ repeat 0)
```

donde (`repeat x`) es una lista infinita cuyo único elemento es `x`.

Codificación

- `(codifica c)` es la codificación de la cadena `c` como una lista de bits obtenida convirtiendo cada carácter en un número Unicode, convirtiendo cada uno de dichos números en un octeto y concatenando los octetos para obtener una lista de bits. Por ejemplo,

```
*Main> codifica "abc"
[1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
```

```
codifica :: String -> [Bit]
codifica = concat . map (creaOcteto . int2bin . ord)
```

donde `(concat xss)` es la lista obtenida concatenando la lista de listas `xss`.

Codificación

- Ejemplo de codificación,

```
codifica "abc"
= concat . map (creaOcteto . int2bin . ord) "abc"
= concat . map (creaOcteto . int2bin . ord) ['a','b','c']
= concat [creaOcteto . int2bin . ord 'a',
          creaOcteto . int2bin . ord 'b',
          creaOcteto . int2bin . ord 'c']
= concat [creaOcteto [1,0,0,0,0,1,1],
          creaOcteto [0,1,0,0,0,1,1],
          creaOcteto [1,1,0,0,0,1,1]]
= concat [[1,0,0,0,0,1,1,0],
          [0,1,0,0,0,1,1,0],
          [1,1,0,0,0,1,1,0]]
= [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
```

Separación de octetos

- `(separaOctetos bs)` es la lista obtenida separando la lista de bits `bs` en listas de 8 elementos. Por ejemplo,

```
*Main> separaOctetos [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0]
[[1,0,0,0,0,1,1,0],[0,1,0,0,0,1,1,0]]
```

```
separaOctetos :: [Bit] -> [[Bit]]
separaOctetos [] = []
separaOctetos bs =
    take 8 bs : separaOctetos (drop 8 bs)
```

Decodificación

- `(descodifica bs)` es la cadena correspondiente a la lista de bits `bs`. Por ejemplo,

```
*Main> descodifica [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
"abc"
```

```
descodifica :: [Bit] -> String
descodifica = map (chr . bin2int) . separaOctetos
```

Por ejemplo,

```
descodifica [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
= (map (chr . bin2int) . separaOctetos)
  [1,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,1,0]
= map (chr . bin2int) [[1,0,0,0,0,1,1,0],[0,1,0,0,0,1,1,0],[1,1,0,0,0,1,1,0]]
= [(chr . bin2int) [1,0,0,0,0,1,1,0],
   (chr . bin2int) [0,1,0,0,0,1,1,0],
   (chr . bin2int) [1,1,0,0,0,1,1,0]]
= [chr 97, chr 98, chr 99]
= "abc"
```

Transmisión

- ▶ Los canales de transmisión pueden representarse mediante funciones que transforman cadenas de bits en cadenas de bits.
- ▶ `(transmite c t)` es la cadena obtenida transmitiendo la cadena `t` a través del canal `c`. Por ejemplo,

```
*Main> transmite id "Texto por canal correcto"  
"Texto por canal correcto"
```

```
transmite :: ([Bit] -> [Bit]) -> String -> String  
transmite canal = descodifica . canal . codifica
```

Corrección de la transmisión

- ▶ Propiedad: Al transmitir cualquier cadena por el canal identidad se obtiene la cadena.

```
prop_transmite :: String -> Bool  
prop_transmite cs =  
  transmite id cs == cs
```

- ▶ Comprobación de la corrección:

```
*Main> quickCheck prop_transmite  
+++ OK, passed 100 tests.
```

Bibliografía

1. R. Bird. *Introducción a la programación funcional con Haskell*. Prentice Hall, 2000.
 - ▶ Cap. 4: Listas.
2. G. Hutton *Programming in Haskell*. Cambridge University Press, 2007.
 - ▶ Cap. 7: Higher-order functions.
3. B.C. Ruiz, F. Gutiérrez, P. Guerrero y J.E. Gallardo. *Razonando con Haskell*. Thompson, 2004.
 - ▶ Cap. 8: Funciones de orden superior y polimorfismo.
4. S. Thompson. *Haskell: The Craft of Functional Programming*, Second Edition. Addison-Wesley, 1999.
 - ▶ Cap. 9: Generalization: patterns of computation.
 - ▶ Cap. 10: Functions as values.