Tema 3: Demostraciones proposicionales

José A. Alonso Jiménez
Miguel A. Gutiérrez Naranjo

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Métodos semánticos y demostrativos

- **Ventajas e inconvenientes de los métodos semánticos:**
  - Ventajas:
    * simplicididad conceptual
    * facilidad de implementación
  - Inconvenientes:
    * complejidad exponencial según las variables
    * variables irrelevantes para las consecuencias
    * no generalizables a primer orden
- **Ventajas e inconvenientes de los métodos demostrativos:**
  - Ventajas:
    * demostraciones más cortas que tablas de verdad
    * facilidad de comprender las demostraciones
    * generalizables a primer orden
  - Inconvenientes:
    * Dificultad en encontrar la prueba

Esquemas e instancias

- **Ejemplo de esquema e instancias del esquema:**
  - **Esquema:** $F \to (G \to F)$
  - **Instancia 1:** $p \to (q \to p)$
  - **Instancia 2:** $(p \land r) \to ((p \leftrightarrow q) \to (p \land r))$
- **Ejemplo de esquema e instancias del esquema:**
  - **Esquema:** $(F \land G) \leftrightarrow (G \lor F)$
  - **Instancia 1:** $(p \land q) \leftrightarrow (q \lor p)$
  - **Instancia 2:** $((p \land r) \land q) \leftrightarrow (q \lor (p \land r))$

Reglas de inferencia

- **Papel de las reglas de inferencia en los métodos demostrativos**
  - generadoras de conocimiento
  - semejantes a operadores en espacios de estados
- **Ejemplo de regla de inferencia**
  - Regla del modus ponens:

$$\frac{\begin{array}{l} F \to G \\ F \end{array}}{G}$$

  - Premisas y conclusión de la regla
  - Instancias de la regla

$$\frac{\begin{array}{l} llueve \to mojado \\ llueve \end{array}}{mojado} \qquad \frac{\begin{array}{l} mojado \to resbaladizo \\ mojado \end{array}}{resbaladizo}$$

$$\frac{\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \end{array}}{q \to r} \qquad \frac{\begin{array}{l} (p \to q) \to r \\ p \to q \end{array}}{r}$$

Reglas de inferencia adecuadas

- **Regla de inferencia adecuada:**
  - $Premisas \models Conclusion$
  - Ejemplos:

Modus ponens (MP)

$$\frac{\begin{array}{l} F \to G \\ F \end{array}}{G}$$

Modus tollens (MT)

$$\frac{\begin{array}{l} F \to G \\ \neg G \end{array}}{\neg F}$$

Elim. de equiv. (EE1)

$$\frac{F \leftrightarrow G}{F \to G}$$

Elim. de equiv. (EE2)

$$\frac{F \leftrightarrow G}{G \to F}$$

Doble negación (DN)

$$\frac{\neg\neg F}{F}$$

Demostraciones

- **Ejemplo elemental de demostración**
  - **Argumento:** Si ayer fue lunes, hoy es martes. Si hoy es martes, mañana será miércoles. Ayer fue lunes. Por tanto, mañana será miércoles.
  - **Demostración:**

1.	ayer_lunes → hoy_martes	Premisa
2.	hoy_martes → mañana_miércoles	Premisa
3.	ayer_lunes	Premisa
4.	hoy_martes	MP 1,3
5.	mañana_miércoles	MP 4,2

- **Ejemplo elemental de demostración**
  - **Argumento:** Si sale cara, yo gano. Si sale cruz, tú no ganas. Sale cruz. Por tanto, yo gano
  - **Demostración:**

1.	$cara \rightarrow gano$	Premisa
2.	$cruz \rightarrow \neg ganas$	Premisa
3.	$cruz$	Premisa
4.	$cara \leftrightarrow \neg cruz$	Premisa
5.	$ganas \leftrightarrow \neg gano$	Premisa
6,	$\neg ganas$	MP 2,3
7.	$\neg gano \rightarrow ganas$	EE2 5
8.	$\neg\neg gano$	MT 6,7
9.	$gano$	DN 8

Esquemas de axiomas

- **Esquemas de axiomas**
  - Necesidad de axiomas
  - Esquemas:

    II: $F \rightarrow (G \rightarrow F)$

    DI: $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$

    RA: $(\neg F \rightarrow \neg G) \rightarrow ((\neg F \rightarrow G) \rightarrow G)$

    EI1: $(F \leftrightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow G)$

    EI2: $(F \leftrightarrow G) \rightarrow (G \rightarrow F)$

    IE: $(F \rightarrow G) \rightarrow ((G \rightarrow F) \rightarrow (F \leftrightarrow G))$

    DD: $(F \vee G) \leftrightarrow (\neg F \rightarrow G)$

    DC: $(F \wedge G) \leftrightarrow \neg(\neg F \vee \neg G)$
  - Nombres:

    II: Introducción de la implicación

    DI: Distribución de la implicación

    RA: Reducción al absurdo

    EI1: Eliminación de la equivalencia 1

    EI2: Eliminación de la equivalencia 2

    IE: Introducción de la equivalencia

    DD: Definición de la disyunción

    DC: Definición de la conjunción
  - Validez de los esquemas de axiomas

Demostración

- **Demostración**
  - **Definición:** $F_1, \dots, F_n$ es una demostración (o deducción) de F a partir de S si $F_n = F$ y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
    1. F_i es una premisa (i.e. $F_i \in S$)
    2. F_i es una instancia de un esquema axioma
    3. F_i se obtiene por Modus Ponens a partir de dos anteriores.
  - F es deducible a partir de S: $S \vdash F$
  - Ejemplo: $\{p \to q, q \to r\} \vdash p \to r$

1.	$p \to q$	Premisa
2.	$q \to r$	Premisa
3.	$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$	II
4.	$p \to (q \to r)$	MP 2,3
5.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	DI
6.	$(p \to q) \to (p \to r)$	MP 4,5
7.	$p \to r$	MP 1,6

- **Comentarios:**
  - Adecuación: $S \vdash F \Longrightarrow S \models F$
  - Completitud: $S \models F \Longrightarrow S \vdash F$
  - Deducción y automatización del razonamiento

Bibliografía

- **Genesereth, M.R. *Computational Logic* (27 March 2000)**
  - **Cap. 4 “Propositional proofs”**
- **Nilsson, N.J. *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2000)**
  - **Cap. 13 “El cálculo proposicional”**
- **Russell, S. y Norvig, P. *Inteligencia artificial (un enfoque moderno)* (Prentice Hall Hispanoamericana, 1996)**
  - **Cap. 6.4 “Lógica propositiva: un tipo de lógica muy sencillo”**