Lógica Computacional

2º Curso Plan 96 (Notas para el Curso 01-02)

I. Simbolización de Formas del Lenguaje

La lógica permitió aportar criterios de discernimiento en las discusiones de los antiguos filósofos griegos y posteriormente los matemáticos la utilizaron para formular axiomáticamente sus teorías. Debido a este origen y desarrollo histórico, las cuestiones estudiadas han sido tradicionalmente de carácter fundamental, ¿qué es verdad ?, ¿qué teorías son axiomatizables ? o ¿qué es un modelo de una teoría ?. Desde los años 60 la lógica se incorpora en la informática con un uso mas pragmático, donde la cuestión clave se corresponde con la pregunta ¿qué es computable ?. La lógica juega un papel importante en algunos campos de la informática como son la verificación de programas, la semántica de lenguajes de programación, la resolución automática de teoremas (fundamento de la programación lógica) o como instrumento de representación del conocimiento y de inferencia o deducción de nuevo conocimiento en sistemas complejos de información.

El objetivo de la lógica es el estudio matemático de la formulación de las argumentaciones o razonamientos. Para abordar este estudio es necesario disponer de un lenguaje formal para representar tales argumentaciones. En un lenguaje se ha de definir de manera precisa, un conjunto de símbolos que tengan significados y usos bien determinados y unas reglas de formación de las expresiones correctas del lenguaje. El lenguaje de la lógica permite representar la estructura sintáctica del conocimiento o de la información relativa a un problema o argumentación de tal forma que el “significado” real de tal conocimiento se transforma en el significado verdad o falso de la lógica clásica. Con este lenguaje artificial se abstrae la forma de los enunciados y de las argumentaciones perdiéndose cualquier referencia al contenido o significado real (ya que, como apuntó B. Russell, para comprobar la solidez de un argumento se pierde el tiempo atendiendo a la materia por ser la forma la que se ha de examinar ante todo).

Una vez que se dispone de un lenguaje para representar la estructura formal de enunciados y argumentaciones, es necesario identificar relaciones entre ellas y dar una definición de razonamiento o argumentación válida a partir de los axiomas o formas de enunciados asumidos como válidos y de reglas de inferencia que indican cuando una fórmula conclusión es deducible a partir de otras fórmulas premisas o hipótesis.

Todos estos componentes (alfabeto y expresiones del lenguaje, axiomas y reglas de inferencia) forman un sistema formal. La palabra formal (según A.G. Hamilton) se refiere a una situación en la que se emplean símbolos que carecen de significado real pero cuyo comportamiento y propiedades están completamente determinados por un conjunto de reglas. En la literatura también se encuentra el término sistema axiomático en el que se ustudian las argumentaciones tanto desde el punto de vista de su significado (semánticamente) como de su forma sintáctica (axiomáticamente). Un sistema formal entiende una fórmula como una estructura formal (sin tener en cuenta su significado). Se llama sistema formal a la parte sintáctica de un sistema axiomático (de acuerdo con Shoenfield).

Un lenguaje se define a partir de un conjunto de símbolos y un conjunto de reglas de combinación de símbolos para definición de las expresiones correctas en el lenguaje.

Símbolos de un lenguaje de primer orden o Alfabeto:

a) **Símbolos no lógicos:**

Símbolos de función con n argumentos: f, g, h, ...
Símbolos de función 0-aria (constantes): a, e, ...
Símbolos de predicado con n argumentos: p, q, r ...

b) **Símbolos lógicos:**

Símbolos de variable: x,y,z, ...
Símbolos de conectivas: $\vee$, $\neg$
Símbolos de cuantificadores: $\exists$

Cuando entre los símbolos lógicos se encuentra el del predicado de igualdad (=) se dice que es un lenguaje de primer orden con igualdad. En estos apuntes se tratará de este tipo de lenguajes aunque no se indique explícitamente. En alguna bibliografía también se consideran como símbolos del lenguaje a los de puntuación: (,) y "," con objeto de agrupar los argumentos en las funciones y predicados o de eliminar ambigüedades entre las combinaciones de los símbolos al formar la expresiones correctas. No son necesarios cuando para las expresiones se utiliza la forma prefija sin paréntesis. En estos apuntes se utiliza la forma prefija con paréntesis, salvo para la igualdad por analogía con las matemáticas.

Las expresiones correctas del lenguaje de primer orden son secuencias de símbolos lógicos o no lógicos denominadas términos y las fórmulas, definidas inductivamente:

a) Definición de ***término***:

1. Todo símbolo de constante es un término
2. Todo símbolo de variable es un término
3. Si a_1, ..., a_n son términos y f es un símbolo de función n-aria
entonces f(a_1, ..., a_n) es un término (en notación prefija f $a_1 a_2 ... a_n$).
4. No hay más términos que los definidos por los puntos anteriores.

b) Definición de ***fórmula***:

1. Si p es un símbolo de predicado n-ario y a1, ..., an son términos entonces p(a1, ..., an) es una fórmula, denominada fórmula atómica (en notación prefija pa1a2...an).
   (a = b) es una fórmula atómica cuando el predicado es la igualdad.
2. Si F es una fórmula entonces (¬F) es una fórmula
3. Si F y G son fórmulas entonces (F v G) es una fórmula
4. Si F es una fórmula entonces (∃x F) es una fórmula.
5. No hay mas fórmulas que las definidas por los puntos anteriores.

Las letras mayúsculas representan esquemas de fórmulas.

(∃x (p v q)) es una fórmula de tipo (∃x F) con F ≡ (p v q)

Un lenguaje de Primer Orden puede construirse con dos conectivas y con un cuantificador (lenguaje mínimo), pero para mayor expresividad suelen utilizarse las cinco conectivas de la lógica clásica { ¬, v , ∧, →, <–>} y los dos cuantificadores { ∃ , ∀}. Las nuevas conectivas y el cuantificador universal se entienden como ampliación del conjunto de símbolos lógicos del lenguaje a partir del conjunto mínimo utilizado { ¬, v , ∃ } y se definen como abreviaciones o sinónimos de las fórmulas:

Implicación: (A → B) abreviatura de (¬ A ∨ B)

Conjunción: (A ∧ B) abreviatura de (¬ (¬A ∨ ¬B))

Doble implicación: (A ↔ B) abreviatura de ((A → B) ∧ (B → A))

Cuantificador Universal: ∀x F abreviatura de (¬ (∃x (¬ F)))

Con el lenguaje ampliado, las nuevas reglas de definición de las fórmulas son:

Definición

1. Si p es un símbolo de predicado n-ario y a1, ..., an son términos entonces p(a1, ..., an) es una fórmula, denominada fórmula atómica (en notación prefija pa1a2...an).
   (a = b) es una fórmula atómica cuando el predicado es la igualdad.
2. Si F es una fórmula entonces (¬F) es una fórmula
3. Si F y G son fórmulas entonces (F∨G), (F∧G), (F→G), (F↔G) son fórmulas.
4. Si F es una fórmula entonces (∃x F) y (∀x F) son fórmulas.
5. No hay mas fórmulas que las definidas por los puntos anteriores.

Para la definición del lenguaje de una teoría será necesaria únicamente la definición de sus símbolos no lógicos, clasificados en símbolos de constante, símbolos de función y su aridad, símbolos de proposición y finalmente los símbolos de predicado y su aridad.

Símb-cte = { 0 }   Símb-fun = { s(_), +(_,_), *(_,_) }
Símb-prop = { }   Símb-pred = { menor(_,_), par(_) }

En este lenguaje son expresiones correctas:

+(0,s(x))	término

menor(0,s(+(0,x))) fórmula atómica

(∃x (menor(0,s(+(0,x))) ∨¬ par(x))) fórmula compuesta

Notación:

Para cada símbolo de predicado y de función es necesario indicar su aridad (número de argumentos). Se utiliza el símbolo "_" (que no pertenece al alfabeto del lenguaje) que indica el "lugar" de cada argumento, así p(_,_) indica que el predicado p tiene dos argumentos.

Un lenguaje de una teoría describe los objetos (o individuales de la teoría) mediante términos y sus propiedades o las relaciones formales entre estos objetos mediante fórmulas. En general puede entenderse que los símbolos de predicado con un argumento permiten representar formalmente una propiedad del individuo al que denota el argumento y los binarios una relación entre los individuos a los que denotan sus argumentos. A estas propiedades o relaciones será posible asociar un valor de verdad.

Por ejemplo los números naturales se describen por

0, suc(0), suc(suc(0)),... expresiones que son términos.

∃x (menor(0,suc(x)))), puede "leerse": existe un elemento x para el que el 0 es menor que su sucesor.

El valor de verdad de las fórmulas de un lenguaje de primer orden se estudiará en los capítulos siguientes mediante los métodos que aporta la lógica (la fórmula del ejemplo anterior, representará la forma de un resultado cierto o falso en la teoría de los números naturales)

Supongamos que para el denomindo "Problema de Sócrates" se desea definir un lenguaje de primer orden que permita representar formalmente la estructura de la argumentación anterior (enunciado por W. de Ockahn, 1349):

Sócrates es un hombre. Todos los hombres son mortales. Luego Sócrates es mortal

El lenguaje en este caso esta formado por los siguientes símbolos no lógicos:

Símb-cte = { sócrates } Símb-fun = { }

Símb-prop = { } Símb-pred = { hombre(_), mortal(_)}

y es un lenguaje en el que son fórmulas las siguientes expresiones:

hombre(sócrates)

(¬ (∃x (¬ (¬ hombre(x) v mortal(x)))))

luego, mortal(Sócrates)

En el lenguaje ampliado la fórmula (¬(∃x(¬ (¬ hombre(x) v mortal(x))))) puede ser escrita por

∀x(hombre(x) → mortal(x)), fórmula en la que ya puede "leerse" todos los hombres son mortales.

En este problema en el que se ha expresado en castellano un razonamiento concreto, se ha formalizado o representado la forma del razonamiento: las hipótesis del argumento se describen con las dos primeras fórmulas y la tercera fórmula se entiende como la tesis del argumento (la partícula luego en el enunciado, indica el comienzo de la conclusión y no se corresponde con ninguno de los símbolos no lógicos vistos hasta el momento).

Los paréntesis, además de aparecer en los términos funcionales o en las fórmulas atómicas, pueden agrupar fórmulas como se indica en la definición de fórmula. Para evitar el abuso de paréntesis se asume por convenio la siguiente prioridad entre conectivas y cuantificadores:

nivel 1: $\neg$, $\exists$, $\forall$

nivel 2: $\vee$, $\wedge$

nivel 3: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

primero se agrupan los de niveles inferiores con las subfórmulas a las que afectan, que son las fórmulas "mas pequeñas" que vienen a continuación.

En caso de que afecten a fórmulas compuestas es necesario el uso de paréntesis cuando aparecen conectivas o cuantificadores del mismo nivel (salvo con las cuantificaciones o la negación)::

$\neg p \vee q$ es $((\neg p) \vee q)$ y no hay ambigüedad usando la jerarquía

Sin embargo son necesarios en la siguiente fórmula :

$(\exists x(\forall y(\neg(a(x,y)) \rightarrow((b(x)\vee c(y)) \wedge d(x)))))$

que se escribe también como

$\exists x\forall y(\neg a(x,y) \rightarrow (b(x)\vee c(y)) \wedge d(x))$

Hay bibliografía en la que además se asume la asociación de conectivas por la derecha o por la izquierda en caso de ambigüedad entre conectivas del mismo nivel y así evitar completamente el uso de paréntesis, pero es un convenio que no se va a tener en cuenta en estos apuntes.

A v B v C en vez de A v (B v C)

A v B v C v D en vez de A v (B v (C v D))

La ventaja de no utilizar el lenguaje ampliado de la lógica es la concisión de las demostraciones de los resultados teóricos de las Teorías de Primer Orden. La ventaja de utilizar el lenguaje ampliado en la práctica, es la mayor expresividad de la expresión de los resultados así como de su uso durante la búsqueda de demostraciones. Por ello los resultados teóricos se demuestran sobre fórmulas del lenguaje mínimo y los problemas se resuelven sobre el lenguaje ampliado.

1.1.1 Formulación con un Lenguaje Proposicional

Se dice que un lenguaje es proposicional cuando esta constituido por los símbolos lógicos de conectivas y los símbolos no lógicos de proposición (predicados 0-arios). La proposición es la unidad mínima e indivisible de información sobre cuya verdad o falsedad es posible pronunciarse. La lógica proposicional es la parte que concierne al estudio de las fórmulas y argumentaciones con fórmulas proposicionales tanto semántica como aciomáticamente.

La definición de fórmula en un Lenguaje Proposicional es:

1. Fórmula atómica (símbolo de predicado 0-ario)
2. Si A y B son fórmulas entonces:
   $\neg$ A es una fórmula
   A $\vee$ B es una fórmula   A $\wedge$ B es una fórmula
   A $\rightarrow$ B es una fórmula   A $\leftrightarrow$ B es una fórmula
3. No hay mas fórmulas proposicionales que las definidas anteriormente

En el proceso de formulación o modelización de la estructura de enunciados expresados en castellano se identifican dos etapas, la definición del marco conceptual o selección de símbolos proposicionales para representar los enunciados simples identificados en el texto (o hipótesis de representación) y la etapa de construcción de las fórmulas.

> *Vete y mira. Si miras, no hagas comentarios si no lo apruebas. Haces comentarios. Luego lo apruebas sin mirarlo.*
>
> Marco conceptual: v: vete m: mira c: haces comentarios a: lo apruebas
> Formulación: v $\wedge$ m , m -> ($\neg$a $\rightarrow$ $\neg$c) , c luego a $\wedge\neg$m

Para la formulación de conocimiento con el lenguaje proposicional pueden utilizarse algunos “patrones” de frases en castellano que se corresponden con una fórmula asociada al patrón (Cuena 85): Sean A y B dos fórmulas proposicionales cualesquiera,

(A $\wedge$ B) A y B
A pero B A y sin embargo B
A porque B (por convenio)

(A v B) A o B o ambos
A o B
al menos A o B

($\neg$ A) no A
es falso A

(A <-> B) A si y solo si B
A necesario y suficiente para B

$(A \rightarrow B)$ si A entonces B (no siempre es una relación causa a efecto)

A suficiente para B B necesario para A

A solo si B B si A no A a menos que B

Si llueve entonces me mojo. Llueve. Luego me mojo.

Marco Conceptual: ll: llueve m: me mojo

Formulación: $(ll \rightarrow m)$, ll luego m

Si Manuel no se entrenó con Francisco el día de la final entonces Francisco alcanzó el éxito o Manuel llegó el primero a la meta. Por otra parte, si Francisco no alcanza el éxito, Manuel no se habría entrenado con Francisco el día de la final y el primer premio estaría desierto. No obstante, el primer premio estaría desierto sólo si Francisco alanzó el éxito o Manuel llegó a la meta o ambas cosas.

¿Alcanzó el éxito Francisco?

Marco Conceptual:

f: Francisco alcanza el éxito e: Manuel entrenó con Francisco el día de la final

m: Manuel llega a la meta p: el primer premio está desierto

Formulación: $(\neg e \rightarrow f \vee m)$, $(\neg f \rightarrow (\neg e \wedge m))$, $(p \rightarrow (f \vee m))$ luego ¿f?

¿Cual es el secreto de su larga vida? Preguntó un joven estudiante a un sabio centenario.

-Sigo estrictamente mi dieta: Si no bebo cerveza para cenar, entonces siempre tomo pescado. Siempre que bebo cerveza y tomo pescado en la cena, no tomo helado de postre. Si no tomo helado o no bebo cerveza entonces nunca tomo pescado.-

El estudiante encontró un tanto confusa la respuesta. ¿Puedes simplificarla? (U.Schöning, 89)

Marco Conceptual:

c: bebo cerveza para cenar p: tomo pescado para cenar h: tomo helado de postre

Formulación: $\neg c \rightarrow p$, $c \wedge p \rightarrow \neg h$, $\neg h \vee \neg c \rightarrow \neg p$

Metodología de formulación aconsejada

Por refinamientos sucesivos de la estructura sintáctica de la frase o de las frases componentes.

Si no bajamos las ventanillas del coche ni abrimos el techo solar seguro que tenemos aire acondicionado

a) Refinando la estructura sintáctica:

1º (no bajamos las ventanillas del coche ni abrimos el techo solar) -> (tenemos aire acondicionado)

2º (no b ni t) $\rightarrow$ a

3º $\neg b \wedge \neg t \rightarrow a$

b) Simbolizando primero las frases componentes:

1º si no b ni t seguro que a

2º si $\neg b \wedge \neg t$ entonces a

3º $\neg b \wedge \neg t \rightarrow a$

1.1.2 Formulación Predicativa

Sócrates es un hombre. Todos los hombres son mortales. Luego Sócrates es mortal.

Marco Conceptual:

p: Sócrates es un hombre

q: todos los hombres son mortales

r: Sócrates es mortal

Formulación: p, q luego r

Claramente tomando las frases como afirmaciones indivisibles la formulación (de p y q se deduce r) no es válida. Por lo tanto es necesario tomar como base de formulación los componentes de las proposiciones para modelizar "que se afirma", "de quien se afirma" y sobre "cuantos" se afirma (algunos o todos) y disponer de toda la potencia expresiva de la lógica de primer orden.

Los criterios de calificación de la “bondad o elegancia” de una formulación dependen en cierta medida del “uso” posterior de una modelización. Es decir no existe, en general, una única formalización en el lenguaje de la lógica del conocimiento relativo a un problema, y se caracterizan o distinguen por su adecuación al objetivo de la formalización (es un criterio entre otros posibles), entendiéndose por objetivo de una formalización a la comprobación de la corrección del razonamiento formalizado o la deducción de nuevas fórmulas.

El objetivo de la modelización (simbolización en fórmulas de la información expresada en castellano) es construir fórmulas en un dominio concreto de individuos a partir de frases de las que se formula, exclusivamente su estructura sintáctica. Los elementos formales que aporta el lenguaje de la lógica son:

1. **Términos**, permiten representar formalmente
   - variables: individuo del dominio representado genéricamente
   - constantes: individuo particular del dominio
   - compuestos: representación implícita de individuos del dominio
2. **Símbolos de predicados**, permiten representar formalmente
   - 0-ario: proposición o hechos indivisibles
   - 1-ario: propiedad de un individuo (su argumento)
   - n-ario: relaciones entre términos (sus argumentos)
3. **Cuantificaciones,** para representar cuantos individuos cumplen cierta información
   - Existencial: algunos elementos del dominio
   - Universal: todos los elementos del dominio
4. **Conectivas** (∧, v, -, ->, <->) que combinan información.

Las etapas aconsejables para la formalización de las formas de un lenguaje son :

1: Descripción del Marco conceptual:

Características del dominio del problema (individuos a los que se refiere la información), Simbolización de los objetos del dominio, de las propiedades de los objetos y sus relaciones que dejan explícitas las hipótesis de representación.

2: Formalización del problema

La representación formal, formulación o modelización de información expresade en lenguaje natural utilizando un lenguaje de primer orden se presenta a continuación como un compendio de convenios, consejos y comentarios útiles en determinadas situaciones.

1. Convenio: Todas las variables han de estar cuantificadas.

Durante el proceso de formalización han de hacerse las hipótesis necesarias de cuantificaciones elididas de objetos a los que se refiere el texto, ya que los matices en el lenguaje usual son difíciles de predecir o formalizar. Por defecto, a las variables no cuantificadas se consideran cuantificadas universalmente.

"Algunos ingleses son amigos de españoles"

$\exists x\ (I(x) \wedge \forall y\ (E(y) \rightarrow A(x,y))$

"los ingleses son amigos de los españoles"

$\forall x\ (I(x) \rightarrow \forall y\ (E(y) \rightarrow A(x,y)))$

"los ingleses son amigos de algunos españoles"

$\forall x\ (I(x) \rightarrow \exists\ y\ (E(y) \wedge A(x,y)))$

"sólo los ingleses son amigos de los españoles"

$\forall x\ \forall y\ (E(y) \rightarrow (A(x,y) \rightarrow I(x)))$

2. Consejo: Es conveniente seleccionar una representación formal de las relaciones de forma similar a su uso habitual.

No se exige que siempre se siga esta hipótesis de formalización. Dependiendo de la información relativa al problema debe hacerse la hipótesis mas conveniente (para obtener el objetivo asociado a la formalización). Por ejemplo si en un texto sólo aparece el concepto "entrar en un país" puede seleccionarse el predicado E(x) uno-ario para formalizar ese concepto, y en otro caso, si aparece a lo largo del texto referencias a diferentes países o bien cuantificaciones al argumento que representa un país entonces será necesario formalizar con E(x,y), "x entra en el país y".

Todo aquel que entre en el país y no sea un VIP será cacheado por un aduanero. Hay un contrabandista que entra en el país y que solo podrá ser cacheado por contrabandistas. Ningún contrabandista es un VIP. Luego algún aduanero es contrabandista. (F 91)

Marco Conceptual

entre(X): X entra en el país	nvip(X): X no es un VIP
cachea(X,Y): X cachea a Y	aduanero(X): X es un aduanero
contrabandista(X): X es un contrabandista	

Formalización:

$\forall$x (entra(x) $\wedge$ ¬vip(x) -> $\exists$y(cachea(y,x) $\wedge$ aduanero(y)))

$\exists$x(contrabandista(x)$\wedge$entra(x)$\wedge\forall$y(cachea(y,x) -> contrabandista(y)))

¬ $\exists$x (contrabandista(x) $\wedge$ vip(x))

$\exists$x (aduanero(x) $\wedge$ contrabandista(x))

3. Comentario: Las fórmulas cuantificadas universalmente "suelen" tener por conectiva principal a la implicación, de forma que "no se sabe si algún individuo cumple una cierta condición pero para todos los que la cumplan se verifica la conclusión".

Los inteligentes son deportistas : $\forall$x (i(x) -> d(x))

no se sabe si algún individuo verifica que es inteligente pero si hay alguno y para todos ellos se verifica que son deportistas. La fórmula $\forall$x (i(x) $\wedge$ d(x)) significa que "todos" los individuos del dominio son inteligentes y deportistas que no es lo que se pretendía expresar en este caso.

Las fórmulas cuantificadas existencialmente "suelen" tener por conectiva principal a la conjunción, ya que la forma de entender una cuantificación existencial es que se afirma la existencia de un individuo que verifica (y es posible constatarlo) o del que se afirma una secuencia de propiedades.

Hay hombres altos que sólo viajan en coche

$\exists$x(H(x)$\wedge$A(x)$\wedge\forall$y (V(x,y) -> C(y)))

Hay ocasiones en que explícitamente aparece el tipo de conectiva principal:

Todos son inteligentes y aplicados: $\forall$x (I(x) $\wedge$ A(x))

Hay alguno que si no atiende, no resolverá el problema P2: $\exists$x(¬A(x) -> ¬R(x,P2))

4. Comentario: Diferentes dominios (hipótesis de la formalización) dan lugar a diferentes modelizaciones.

En el problema de Sócrates si el dominio es el de los hombres la modelización del problema es:

$\forall x$ M(x) luego M(soc)

Ya que no es necesaria hacer explícita la condición de ser hombre, formalizada con el predicado H(x), todos los individuos a los que se refieren las fórmulas son hombres.

5. Consejo: Es conveniente definir un orden entre los argumentos de los predicados.

Se muestra a continuación un ejemplo cuya formalización no es correcta pues no llevaría a la obtención de la conclusión y sin embargo el razonamiento es correcto.

Juan teme a María. Pedro es temido por Juan Luego, alguien teme a María y a Pedro

Sol1:	Marco Conceptual: teme(X,Y): X e Y se temen
	teme(juan,maria), teme(pedro,juan)
	luego $\exists x$ (teme(x,maria) $\wedge$ teme(x,pedro))
Sol2:	Marco Conceptual: teme(X,Y): X teme a Y
	teme(juan,maria), teme(juan, pedro)
	luego $\exists x$ (teme(x,maria) $\wedge$ teme(x,pedro))
Sol3 :	Otra solución es introducir explícitamente como fórmula la reflexividad del predicado,
	es decir incluyendo entre las premisas de Sol1: $\forall x \forall y$ (teme(x, y) $\leftrightarrow$ teme(y,x))

6. Comentario: En lógica clásica se puede representar conocimiento predicativo en base a conceptos (representados por símbolos de predicado con argumentos que son términos) que tengan significado verdad o falso y denotarse a los individuales de un dominio mediante un término, que cuando es una función con argumentos que son a su vez términos, es una representación implícita o simbólica de un individuo del dominio, pero que no siempre debe ser entendida como que el "resultado de su cálculo" es ese individuo, ya que la definición por extensión o con representación finita no siempre es posible e incluso su existencia supondría una "falta de sentido" que solo podrá explicarse una vez estudiado el capítulo de semántica, en el que se verá que la interpretación de las funciones se realiza sobre todos los individuos de un universo, en el no existen diferentes "tipos" de individuos.

El hijo de Joaquín nació el 25 de diciembre	
(n(_) y h(_) funciones)	n(h(joaquin)) = 25d
(n(_) y h(_) predicados)	$\exists x$(h(x,,joaquin)$\wedge$nacio(x, 25d))
El delegado del curso del aula 3301	
(d(_) y c(_) funciones)	d(c(3301))
(d(_) y c(_) predicados)	$\exists x \exists y$(c(x,3301) $\wedge$ d(y,x))

Sin embargo, toda función puede ser representada en términos predicativos creando un nuevo símbolo de predicado con un argumento más que la función en el que se representa el resultado.

fact(0) = 1 *fact(n) = n * fact(n-1)*

Marco Conceptual factorial(x,y): y es el factorial de x

Primera aproximación a su formalización**:**

factorial(0,1) (fórmula atómica)

factorial(n,x) si factorial(n-1,z) y x = n * z

Segunda aproximación:

factorial(0,1).

factorial(n,x) si n' es n-1 y factorial(n',z) y x es n*z.

Tercera aproximación

factorial(0,1).

factorial(n,x) si restar(n,1,n') y factorial(n',z) y multiplicar(n,z,x).

Solución

Marco Conceptual: Dominio: N

factorial(x,y) : y es el factorial de x

restar(x,y,z) : z es el resultado de restar z a y

multiplicar(x,y,z) : z es el resultado de multiplicar x por y

Formulación :

factorial(0,1).

$\forall n \forall x\, ((\exists n' \exists z\, (restar(n,1,n') \wedge factorial(n',z) \wedge multiplicar(n,z,x))) \rightarrow factorial(n,x))$

Representar sólo con predicados es mas "cómodo" pero con predicados y funciones es mas elegante.

El producto de dos números naturales no es un número primo

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (producto(x,y,z)$ -> $\neg\ primo(z))$

$\forall x\ \forall y\ (\neg\ primo(*(x,y)))$ (* símbolo de función)

7. Consejo : La selección del Marco Conceptual es importante ya que diferentes hipótesis de modelización de conceptos produce diferentes formalizaciones del problema.

La existencia de algún canal de TV publica, supone un acicate para cualquier canal de TV privada; el que un canal de TV tenga un acicate, supone una gran satisfacción para cualquiera de sus directivos; en Madrid hay varios canales públicos de TV; TV5 es un canal de TV privada; por tanto, todos los directivos de TV5 están satisfechos. (S 89)

Marco Conceptual:

Hipótesis de que el dominio del problema esté formado por canales de televisión y personas directivos de canales de televisión :

{B(x): x televisión pública, V(x): x televisión privada, A(x): x televisión que tiene un acicate, S(x,y): y televisión que supone una satisfacción para x directivo del la televisión}

La formulación del problema es:

$\exists$x B(x) -> $\forall$y (V(y) -> A(y))), $\forall$x $\forall$y (A(x) -> S(y,x)), $\exists$x B(x), V(TV5)

$\forall$x S(x,TV5)

La existencia de algún canal de TV publica, supone un acicate para cualquier canal de TV privada; el que un canal de TV tenga un acicate, supone una gran satisfacción para cualquiera de sus directivos; en Madrid hay varios canales públicos de TV; TV5 es un canal de TV privada; por tanto, todos los directivos de TV5 están satisfechos. (S 89)

Marco Conceptual:

Hipótesis de dominio del problema formado por canales de televisión ya que en todo el texto aparece "todos los directivos de la televisión"

{B(x): x televisión pública, V(x) x televisión privada,

A(x): x televisión que tiene un acicate,

S(y): y televisión que supone una satisfacción para todos sus directivos}

Formulación:

$\exists$x B(x) -> $\forall$y (V(y) -> A(y))), $\forall$x (A(x) -> S(x)), $\exists$x B(x), V(TV5)]

luego S(TV5)

Quien intente entrar en un país y no tenga pasaporte, encontrará algún aduanero que le impida el paso. A algunas personas motorizadas que intentan entrar en un país le impiden el paso únicamente personas motorizadas. Ninguna persona motorizada tiene pasaporte.

Luego, ciertos aduaneros están motorizados (S 90).

Para el marco conceptual de este problema pueden plantearse dos predicados binarios por naturaleza,

E(x,y): la persona x entra en un país

I(x,y): la persona x impide el paso a la persona y.

Pero para el primer predicado puede considerarse E(x): x entra en el país ya que en todo el texto aparece así (y exactamente así).

No ocurre lo mismo con I(x,y) ya que en una frase aparece que "a cualquier x le impide el paso ... " y en otra frase aparece que "a algún x le impide ..." luego cuando la cuantificación de la variable argumento es distinta no se puede incluir el segundo argumento en la hipótesis de representación

$\forall$x(E(x)$\wedge\neg$P(x) ->$\exists$y(A(y)$\wedge$I(y,x)),

$\exists$x(E(x)$\wedge$ M(x)$\wedge\forall$y(I(y,x) -> M(y)),

$\neg\exists$x(M(x) $\wedge$P(x))

luego $\exists$x(A(x)$\wedge$ M(x))

Los aficionados al fútbol aplauden a cualquier futbolista extranjero. Juanito no aplaude a futbolistas extranjeros. Por tanto, si hay algún futbolista extranjero nacionalizado español, Juanito no es aficionado al fútbol .

Marco conceptual

$E(x)$: x es futbolista extranjero o (segunda hip.) $F(x)$: x es futbolista y $E(x)$: x es extranjero.

$A(x)$: x aficionado al fútbol,

$P(x,y)$: x aplaude a y,

$S(x)$: x nacionalizado español.

La modelización con la primera hipótesis es:

$\forall x \forall y\, (E(x) \to (A(y) \to P(y,x))$, $\neg\exists x\, (E(x) \wedge A(juanito,x))$

$(\exists x\, (E(x) \wedge S(x))) \to \neg A(juanito)$

La modelización con la segunda hipótesis es:

$\forall x\, \forall y (F(x) \wedge E(x) \to (A(y) \to P(y,x))$, $\neg\, \exists x(F(x) \wedge E(x) \wedge A(juanito,x))$

$(\exists x(F(x) \wedge E(x) \wedge S(x))) \to \neg A(juanito)$

8. Consejo: La metodología a seguir en la modelización o formalización de la estructura sintáctica del conocimiento se basa en el principio de refinamientos sucesivos. Se refina la información sucesivamente hasta que se obtiene en términos de los componentes del marco conceptual, se identifican las cuantificaciones y su ámbito y finalmente se determinan las formas sintácticas asociadas a las conectivas.

Ningún aristócrata debe ser condenado a galeras a menos que sus crímenes sean vergonzosos y lleve una vida licenciosa. En la ciudad hay aristócratas que han cometido crímenes vergonzosos aunque su forma de vida no sea licenciosa. ¿Hay algún aristócrata que no esté condenado a galeras? (enunciado de Lewis Carroll)

El dominio es el de los aristócratas y el marco conceptual esta formado por

$V(x)$: x comete crímenes vergonzosos,

$L(x)$: x lleva una vida licenciosa,

$C(x)$: x ha sido condenado a galeras.

La modelización del problema es:

$\forall x\, (C(x) \to (V(x) \wedge L(x)))$, $\exists x(V(x) \wedge \neg L(x))$ luego $\exists x\, \neg C(x)$

La primera frase no se corresponde "directamente ni fácilmente" con ningún patrón de conectiva. Un consejo operativo al abordar esta modelización es plantear una primera solución y comprobar vía equivalencias lógicas, construyendo fórmulas equivalentes a la propuesta. Una de ellas previsíblemente se acercará mas a la forma de entender la frase por el que esta realizando la modelización y le permitirá corroborar su propuesta o bien comprobar que su propuesta no es buena.

Por ejemplo se podría plantear: $\neg\exists x(C(x) \wedge V(x) \wedge L(x)) \leftrightarrow \neg\exists x(C(x) \wedge V(x) \wedge L(x)) \leftrightarrow \forall x \neg(C(x) \wedge V(x) \wedge L(x)) \leftrightarrow \forall x(C(x) \to \neg(V(x) \wedge L(x)))$ con lo que se llega a que todo aquel que sea condenado a galeras no llevaba una vida licenciosa ni comete crímenes vergonzosos. La solución es: $\forall x(C(x) \to (V(x) \wedge L(x)))$ luego todo aquel que haya sido condenado a galeras es porque llevaba una vida licenciosa y cometió crímenes vergonzosos.

Todo individuo que esté conforme con el contenido de cualquier acuerdo internacional lo apoya o se inhibe en absoluto de asuntos políticos. Cualquiera que se inhiba de los asuntos políticos, no participará en el próximo *referendum. Todo español, esta conforme con el acuerdo internacional de Maastricht, al que sin embargo no apoya. Por tanto, cualquier individuo o no es español, o en otro caso, está conforme con el contenido del acuerdo internacional de Maastricht y no participará en el próximo referendum (J 92).*

En la elección del marco conceptual puede, en este caso de hacerse la hipótesis de un dominio genérico ya que hay varios tipos de individuos sobre los cuales versa el problema, los acuerdos y las personas. El tipo de argumentos puede hacerse explícito (vía predicados P(x): x es una persona, I(x): x acuerdo internacional) o puede incorporarse en la definición de los conceptos en los que intervienen.
Por ejemplo si definimos el concepto "conforme con" mediante C(x,y): la persona x esta conforme con el acuerdo internacional y, no será necesario explicitar que x es persona e y un acuerdo internacional. Sin embargo en este caso no se puede incorporar a la definición semántica de "conforme con" ya que a lo largo del texto se cuantifica de diferente manera a y. Esto último no ocurre con "inhibirse" a lo largo del texto por lo que I(x): x se inhibe de asuntos políticos aunque la naturaleza del concepto alguien se inhibe de algo es binaria. Análogamente para A(x,y): la persona x apoya el acuerdo internacional y y para P(x): la persona x participa en un referendum, respectivamente.

La modelización es:
$\forall x\ \forall y(C(x,y) \text{ -> } A(x,y) \vee I(x)), \forall x(I(x) \text{ -> } \neg R(x)), \forall x(E(x) \text{ -> } C(x,m) \wedge \neg A(x,m)) \Rightarrow \forall x(\neg E(x) \vee (C(x,m) \wedge \neg R(x))$

Ningún caballo mayor de tres años es bueno para carreras, salvo si es ganador. Por otra parte, ningún caballo menor o igual de tres años es bueno para el rejoneo. Moro y Lucero son buenos para el rejoneo y además Lucero es un ganador. Sólo los caballos domados son buenos para el rejoneo.
¿Es Lucero un buen caballo para carreras ?
¿Se puede saber si Moro es o no un caballo ganador? (J 97)

Marco Conceptual:

M(x) : x es un caballo mayor de tres años
C(x) : x es un caballo bueno para carreras
G(x) : x es un caballo ganador
R(x) : x es un caballo bueno para el rejoneo
D(x) : x es un caballo que ha sido domado

Símbolos de constante en el dominio de los caballos : a : Moro b : Lucero

Formulación de las frases del enunciado :
Ningún caballo mayor de tres años es bueno para carreras, salvo si es ganador.

Sol1 : $\forall x\ (M(x) \to (G(x) \to C(x)) \wedge (\neg G(x) \to \neg C(x)))$
Sol2 : $\forall x\ ((M(x) \wedge G(x) \to C(x)) \wedge (M(x) \wedge \neg G(x) \to \neg C(x)))$
Sol3 : $\neg\exists x\ ((M(x) \wedge G(x) \wedge \neg C(x)) \vee (M(x) \wedge \neg G(x) \wedge C(x))$
Sol4 : $\forall x\ ((\neg C(x) \to \neg M(x) \vee \neg G(x)) \wedge (C(x) \to \neg M(x) \vee G(x)))$

Por otra parte, ningún caballo menor o igual de tres años es bueno para el rejoneo.

Sol1 : $\neg\exists x\ (\neg M(x) \wedge R(x))$ Sol2 : $\forall x\ (R(x) \to M(x))$

Moro y Lucero son buenos para el rejoneo y además Lucero es un ganador.

$R(a) \wedge R(b) \wedge G(b)$

Sólo los caballos domados son buenos para el rejoneo.

Sol1 : $\forall x\ (R(x) \to D(x))$ Sol2 : $\neg\exists x\ (R(x) \wedge \neg D(x))$

¿Es Lucero un buen caballo para carreras ?
¿ C(b) ? que representa una conclusión a deducir de las fórmulas anteriores. Si se dedujese la respuesta sería afirmativa. Si se encontrase un contraejemplo la respuesta sería negativa

¿Se puede saber si Moro es o no un caballo ganador?

Sol1 : ¿ G(a) ? que representa una conclusión a deducir de las fórmulas anteriores (salvo de la pregunta anterior). Si se deduce, la respuesta sería afirmativa. Si se encontrase un contraejemplo la respuesta sería negativa.

Sol2 : ¿ ¬G(a) ? que representa una conclusión a deducir de las fórmulas anteriores (salvo de la pregunta anterior). Si se deduce, la respuesta sería afirmativa. Si se encontrase un contraejemplo la respuesta sería negativa. Podría darse el caso de obtener contraejemplo ni para G(a) ni para ¬G(a) lo que significaría que no se tiene suficiente información para decidir la respuesta a la pregunta.

9. Consejos

Tipo de frase	Modelización	Observaciones
A a menos que B	$B \rightarrow \neg A$	Os invito a menos que suspenda
No A a menos que B	$A \rightarrow B$	No os invito a menos que apruebe No llevo paraguas a menos que llueva
A sólo si B	$A \rightarrow B$	Os invito sólo si apruebo Me mojo sólo si llueve
A no sólo si B	$B \rightarrow A$	Os invito no sólo si apruebo
A porque B	$(B \rightarrow A) \wedge B$	Os invito porque es mi cumpleaños
A siempre que B	$B \rightarrow A$	Os invito siempre que apruebo
A no siempre que B	$\neg(B \rightarrow A)$	Os invito no siempre que apruebo
No A siempre que B	$\neg(B \rightarrow A)$	No os invito siempre que apruebo
Siempre que B no A	$B \rightarrow \neg A$	Siempre que hace sol no llevo paraguas