Temas de “Lógica informática” (2003–04)

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 30 de Junio de 2004

Índice general

Capítulo 1

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

Lógica informática Curso 2003–04

Tema 1: Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Lógica

- Objetivos de la lógica:
  - La formalización del lenguaje natural
  - Los métodos de razonamiento
- Sistemas lógicos:
  - Lógica proposicional
  - Lógica de primer orden
  - Lógicas modales
- Aplicaciones de la lógica en computación:
  - Programación lógica
  - Verificación y síntesis automática de programas
  - Representación del conocimiento y razonamiento
  - Modelización y razonamiento sobre sistemas

Argumentos y formalización

- **Ejemplos de argumentos:**
  - Ejemplo 1: Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. *Por tanto,* habían taxis en la estación.
  - Ejemplo 2: Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. *Por tanto,* la lámpara está fundida.
- **Formalización:**
  - Simbolización:

Símbolo	Ejemplo 1	Ejemplo 2
p	"el tren llega a las 7"	"hay corriente"
q	"hay taxis en la estación"	"la lámpara está fundida"
r	"Juan llega tarde a la reunión"	"la lámpara está encendida"

  - Si p y no q, entonces r. No r. p. Por tanto, q.
  - $p \land \neg q \rightarrow r, \neg r, p \models q$.

Sintaxis proposicional: Fórmulas proposicionales

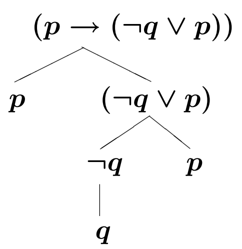
- **Alfabeto proposicional:**
  - variables proposicionales: $p_0, p_1, \dots; p, q, r$
  - conectivas lógicas:
    * monaria: $\neg$ (negación),
    * binarias: $\land$ (conjunción), $\lor$ (disyunción), $\rightarrow$ (condicional), $\leftrightarrow$ (bicondicional).
  - símbolos auxiliares: "(" y ")".
- **Fórmulas proposicionales:**
  - Definición:
    * Las variables proposicionales son fórmulas.
    * Si F y G son fórmulas, entonces $\neg F$, $(F \land G)$, $(F \lor G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas.
  - Ejemplos:
    * Fórmulas: p, $(p \lor \neg q)$, $\neg(p \lor p)$, $((p \rightarrow q) \lor (q \rightarrow p))$
    * No fórmulas: (p), $p \lor \neg q$, $(p \lor \land q)$

Sintaxis proposicional: Fórmulas proposicionales (BNF)

- **Notaciones:**
  - $p, q, r, \ldots$ representarán variables proposicionales.
  - $F, G, H, \ldots$ representarán fórmulas.
  - VP representa el conjunto de los variables proposicionales.
  - Prop representa el conjunto de las fórmulas.
  - $*$ representa una conectiva binaria.
- **Forma de Backus Naur (BNF) de las fórmula proposicionales:**
  - $F ::= p \mid \neg G \mid (F \land G) \mid (F \lor G) \mid (F \to G) \mid (F \leftrightarrow G)$

Sintaxis proposicional: Árboles de análisis

- **Árboles de análisis (o de formación).**



Sintaxis proposicional: Omisión de paréntesis

- **Criterios de reducción de paréntesis:**
  - Pueden eliminarse los paréntesis externos.

    $F \land G$ es una abreviatura de $(F \land G)$
  - Precedencia de asociación de conectivas: $\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow$.

    $F \land G \rightarrow \neg F \lor G$ es una abreviatura de $((F \land G) \rightarrow (\neg F \lor G))$
  - Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

    $F \lor G \lor H$ es una abreviatura de $(F \lor (G \lor H))$

    $F \land G \land H \rightarrow \neg F \lor G$ es una abreviatura de $((F \land (G \land H)) \rightarrow (\neg F \lor G))$

Sintaxis proposicional: Subfórmulas

- **Subfórmulas:**
  - Def: El conjunto Subf(F) de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\text{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una variable;} \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \text{Subf}(G) \cup \text{Subf}(H), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$

  - Ejemplos:
    * $\text{Subf}(p) = \{p\}$
    * $\text{Subf}(q) = \{q\}$
    * $\text{Subf}(\neg q) = \{\neg q, q\}$
    * $\text{Subf}(\neg q \lor p) = \{\neg q \lor p, \neg q, q, p\}$
    * $\text{Subf}(p \rightarrow \neg q \lor p) = \{p \rightarrow \neg q \lor p, p, \neg q \lor p, \neg q, q\}$

Semántica proposicional: valores y funciones de verdad

- Valores de verdad ($\mathbb{B}$):
  - 1: verdadero
  - 0: falso
- Funciones de verdad:
  - $H_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$ t.q. $H_\neg(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 0; \\ 0, & \text{si } i = 1. \end{cases}$
  - $H_\wedge : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\wedge(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j = 1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\vee : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\vee(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\to : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\to(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 1, j = 0; \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
  - $H_\leftrightarrow : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ t.q. $H_\leftrightarrow(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Semántica proposicional: valoración de fórmulas

- Funciones de verdad mediante tablas de verdad:

i	$\neg i$
1	0
0	1

i	j	i ∧ j	i ∨ j	i → j	i ↔ j
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- Valoración de verdad:
  - Def.: Una valoración de verdad es una aplicación $v : \mathrm{VP} \to \mathbb{B}$.
  - Prop: Para cada valoración de verdad v existe una única aplicación $\hat{v} : \textsc{Prop} \to \mathbb{B}$ tal que:
  $$\hat{v}(F) = \begin{cases} v(F), & \text{si } F \text{ es una variable;} \\ H_\neg(\hat{v}(G)), & \text{si } F = \neg G; \\ H_*(\hat{v}(G), \hat{v}(H)), & \text{si } F = G * H \end{cases}$$
  Se dice que $\hat{v}(F)$ es el valor de verdad de F respecto de v.

Semántica proposicional: valoración de fórmulas

- Ejemplo: Sea $F = (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
  - valor de F en una valoración v_1 tal que $v_1(p) = v_1(r) = 1, v_1(q) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \vee & q) & \wedge & (\neg q & \vee & r) \\ (1 & \vee & 0) & \wedge & (\neg 0 & \vee & 1) \\ & 1 & & \wedge & (1 & \vee & 1) \\ & 1 & & \wedge & & 1 & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

  - valor de F en una valoración v_2 tal que $v_2(r) = 1, v_2(p) = v_2(q) = 0$

$$\begin{array}{ccccccc} (p & \vee & q) & \wedge & (\neg q & \vee & r) \\ (0 & \vee & 0) & \wedge & (\neg 0 & \vee & 1) \\ & 0 & & \wedge & (1 & \vee & 1) \\ & 0 & & \wedge & & 1 & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

- Prop.: Sea F una fórmula y v, v' dos valoraciones. Si $v(p) = v'(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $\hat{v}(F) = \widehat{v'}(F)$.
- Notación: Se escribe $v(F)$ en lugar de $\hat{v}(F)$.

Semántica proposicional: modelos y satisfacibilidad

- Modelo de una fórmula
  - Def.: v es modelo de F si $v(F) = 1$.
  - Notación: $v \models F$.
  - Ejemplo (continuación del anterior):
    - si $v_1(p) = v_1(r) = 1, v_1(q) = 0$, entonces $v_1 \models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
    - si $v_2(r) = 1, v_2(p) = v_2(q) = 0$, entonces $v_2 \not\models (p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)$
- Fórmulas satisfacibles e insatisfacibles
  - Def.: F es satisfacible si F tiene algún modelo.
  - Ejemplo: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ es satisfacible
    $v(p) = v(q) = v(r) = 0$
  - Def.: F es insatisfacible si F no tiene ningún modelo.
  - Ejemplo: $p \wedge \neg p$ es insatisfacible

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Semántica proposicional: tautologías y contradicciones

- **Tautologías y contradicciones:**
  - Def.: F es una tautología si toda valoración es modelo de F.
    Se representa por $\models F$.
  - Def.: F es una contradicción si ninguna valoración es modelo de F.
  - Def.: F es contingente si no es tautología ni contradicción.
  - Ejemplos:
    1. $(p \to q) \lor (q \to p)$ es una tautología.
    2. $(p \to q) \land \neg(p \to q)$ es una contradicción.
    3. $p \to q$ es contingente.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \lor (q \to p)$	$\neg(p \to q)$	$(p \to q) \land \neg(p \to q)$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Semántica proposicional: Clasificaciones de fórmulas

- **Clasificaciones de fórmulas:**

<table>
<tr><td colspan="3">Todas las fórmulas</td></tr>
<tr><td>Tautologías</td><td>Contigentes</td><td>Contradicciones</td></tr>
<tr><td>Verdadera en todas las valoraciones

(ej. $p \lor \neg p$)</td><td>Verdadera en algunas valoraciones y falsa en otras
(ej. $p \to q$)</td><td>Falsa en todas las valoraciones

(ej. $p \land \neg p$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Safisfacibles</td><td>Insatisfacibles</td></tr>
<tr><td colspan="3">Todas las fórmulas</td></tr>
</table>

Semántica proposicional: Satisfacibilidad y tautologicidad

- **Los problemas SAT y TAUT:**
  - Problema SAT: Dada F determinar si es satisfacible.
  - Problema TAUT: Dada F determinar si es una tautología.
- **Relaciones entre satisfacibilidad y tautologicidad:**
  - F es tautología $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
  - F es tautología $\implies$ F es satisfacible.
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.

    $p \to q$ es satisfacible.
    $v(p) = v(q) = 1$

    $\neg(p \to q)$ es satisfacible.
    $v(p) = 1, v(q) = 0$

Semántica proposicional: Algoritmos para SAT y TAUT

- **Algoritmos de decisión para SAT y TAUT:**
  - Tablas de verdad para $\models (p \to q) \vee (q \to p)$

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$(p \to q) \vee (q \to p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

p	q	$(p$	$\to$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\to$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0

  - Método de Quine para $\models (p \to q) \vee (q \to p)$

$(p$	$\to$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\to$	$p)$
			0			
	0				0	
				1		0
0		1				
	1					

  - Método de Quine para $\models (p \to q) \vee (q \to p)$

$(p$	$\to$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\to$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
	1*					

Semántica proposicional: Algoritmos para SAT y TAUT

- **Algoritmos de decisión para SAT y TAUT:**
  - Tablas de verdad para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(q \leftrightarrow p)$	$(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

  - Método de Quine para $\not\models (p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

$(p$	$\leftrightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\leftrightarrow$	$p)$
0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1

Semántica proposicional: selección de tautologías

- **Selección de tautologías**
  - 1. $F \to F$ (ley de identidad).
  - 2. $F \vee \neg F$ (ley del tercio excluso).
  - 3. $\neg(F \wedge \neg F)$ (principio de no contradicción).
  - 4. $(\neg F \to F) \to F$ (ley de Clavius).
  - 5. $\neg F \to (F \to G)$ (ley de Duns Scoto).
  - 6. $((F \to G) \to F) \to F$ (ley de Peirce).
  - 7. $(F \to G) \wedge F \to G$ (modus ponens).
  - 8. $(F \to G) \wedge \neg G \to \neg F$ (modus tollens).

Semántica proposicional: Modelo de conjuntos de fórmulas

- **Notación:**
  - $S, S_1, S_2, \dots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- **Modelo de un conjunto de fórmulas:**
  - Def.: v es modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $v \models F$.
  - Representación: $v \models S$.
  - Ejemplo: Sea $S = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), q \to r\}$
    La valoración v_1 tal que $v_1(p) = 1, v_1(q) = 0, v_1(r) = 1$ es modelo de S ($v_1 \models S$).
    $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), \quad q \to r\}$
    1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1
    La valoración v_2 tal que $v_2(p) = 0, v_2(q) = 1, v_2(r) = 0$ no es modelo de S ($v_2 \not\models S$)
    $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), \quad q \to r\}$
    0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0

Semántica proposicional: Consistencia

- **Conjunto consistente de fórmulas:**
  - Def.: S es consistente si S tiene algún modelo.
  - Def.: S es inconsistente si S no tiene ningún modelo.
  - Ejemplos:
    - $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r\}$ es consistente (con modelos v_4, v_6, v_8)
    - $\{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r, \neg r\}$ es inconsistente

	p	q	r	$(p \lor q)$	$(\neg q \lor r)$	$(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$	$p \to r$	$\neg r$
v_1	0	0	0	0	1	0	1	1
v_2	0	0	1	0	1	0	1	0
v_3	0	1	0	1	0	0	1	1
v_4	0	1	1	1	1	1	1	0
v_5	1	0	0	1	1	1	0	1
v_6	1	0	1	1	1	1	1	0
v_7	1	1	0	1	0	0	0	1
v_8	1	1	1	1	1	1	1	0

Semántica proposicional: Consecuencia lógica

- Consecuencia lógica:
  - Def.: F es consecuencia de S si todos los modelos de S son modelos de F.
  - Representación: $S \models F$.
  - Ejemplo: $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \models p \rightarrow r$

	p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
v_1	0	0	0	1	1	1
v_2	0	0	1	1	1	1
v_3	0	1	0	1	0	1
v_4	0	1	1	1	1	1
v_5	1	0	0	0	1	0
v_6	1	0	1	0	1	1
v_7	1	1	0	1	0	0
v_8	1	1	1	1	1	1

  - Ejemplo: $\{p\} \not\models p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Semántica: propiedades de la consecuencia

- Propiedades básicas de la relación de consecuencia:
  - Reflexividad: $S \models S$.
  - Monotonía: Si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
  - Transitividad: Si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.
- Relación entre consecuencia, validez, satisfacibilidad y consistencia:
  - Las siguientes condiciones son equivalentes:
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
    2. $\models F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G$
    3. $\neg(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \rightarrow G)$ es insatisfacible
    4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Semántica proposicional: argumentaciones

- **Ejemplo de argumentación:**
  - Problema de los animales: Se sabe que
    1. Los animales con pelo que dan leche son mamíferos.
    2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
    3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
    4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

    Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.
  - Formalización:
    $\{$ tiene_pelos $\vee$ da_leche $\rightarrow$ es_mamífero,
    es_mamífero $\wedge$ (tiene_pezuñas $\vee$ rumia) $\rightarrow$ es_ungulado,
    es_ungulado $\wedge$ tiene_cuello_largo $\rightarrow$ es_jirafa,
    es_ungulado $\wedge$ tiene_rayas_negras $\rightarrow$ es_cebra,
    tiene_pelos $\wedge$ tiene_pezuñas $\wedge$ tiene_rayas_negras$\}$
    $\models$ es_cebra

Problemas lógicos

- **El problema de los veraces y los mentirosos:**
  - Enunciado: En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase
    1. A dice “B y C son veraces syss C es veraz”
    2. B dice “Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso”
    3. C dice “B es mentiroso syss A o B es veraz”

    Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.
  - Simbolización: a: “A es veraz”, b: “B es veraz”, c: “C es veraz”
  - Formalización:
    $F_1 = a \leftrightarrow (b \wedge c \leftrightarrow c)$, $F_2 = b \leftrightarrow (a \wedge c \rightarrow b \wedge c \wedge \neg a)$ y $F_3 = c \leftrightarrow (\neg b \leftrightarrow a \vee b)$
  - Modelos de $\{F_1, F_2, F_3\}$:
    Si v es modelo de $\{F_1, F_2, F_3\}$, entonces $v(a) = 1, v(b) = 1, v(c) = 0$
  - Conclusión: A y B son veraces y C es mentiroso.

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

  Cap. 0 (Introducción), 6 (Sintaxis de la lógica proposicional), 7 (Semántica de la lógica proposicional), 9 (Consecuencia lógica) y 11 (Lógica proposicional y lenguaje natural).

- M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

  Cap. 1 (Introduction) y 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)

  Cap. 2 (El lenguaje de la lógica proposicional) y 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

  Cap. 1 (Propositional logic).

Bibliografía

- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

  Cap. 1 (La sintaxis de la Lógica) y Cap. 2 (La semántica de la Lógica).

Capítulo 2

Equivalencias y formas normales

LÓGICA INFORMÁTICA CURSO 2003–04

Tema 2: Equivalencias y formas normales

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Equivalencia lógica

- **Fórmulas equivalentes**
  - Def.: F y G son equivalentes si $v(F) = v(G)$ para toda valoración v.
  - Representación: $F \equiv G$
  - Ejemplos de equivalencias notables:
    1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$; $F \wedge F \equiv F$
    2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$; $F \wedge G \equiv G \wedge F$
    3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$; $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$
    4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$; $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
    5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$;
       $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
    6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$
    7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$; $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$
    8. Leyes de tautologías: Si F es una tautología, $F \wedge G \equiv G$; $F \vee G \equiv F$
    9. Leyes de contradicciones: Si F es una contradicción $F \wedge G \equiv F$; $F \vee G \equiv G$

Equivalencia lógica: propiedades

- **Relación entre equivalencia y bicondicional:**
  - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$
- **Propiedades básicas de la equivalencia lógica:**
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- **Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:**
  - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G, entonces la fórmula obtenida, F', es lógicamente equivalente a F.
  - Ejemplo:
    $$\begin{aligned} F &= \neg(p \land q) \to \neg(p \land \neg\neg r) \\ G &= \neg(p \land q) \\ G' &= \neg p \lor \neg q \\ F' &= (\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land \neg\neg r) \end{aligned}$$

Formas normales: Forma normal conjuntiva

- **Átomos y literales:**
  - Def.: Un átomo es un variable proposicional (p.e. $p, q, \ldots$).
  - Def.: Un literal es un átomo o su negación (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \ldots$).
  - Notación: $L, L_1, L_2, \ldots$ representarán literales.
- **Forma normal conjuntiva:**
  - Def.: Una fórmula está en forma normal conjuntiva (FNC) si es una conjunción de disyunciones de literales; es decir, es de la forma
    $(L_{1,1} \lor \ldots \lor L_{1,n_1}) \land \ldots \land (L_{m,1} \lor \ldots \lor L_{m,n_m})$.
  - Ejemplos: $(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)$ está en FNC
    $(\neg p \lor q) \land (q \to p)$ no está en FNC
  - Def.: Una fórmula G es una forma normal conjuntiva (FNC) de la fórmula F si G está en forma normal conjuntiva y es equivalente a F.
  - Ejemplo: Una FNC de $\neg(p \land (q \to r))$ es $(\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg r)$.

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- **Algoritmo de cálculo de forma normal conjuntiva:**
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal conjuntiva de F:
    1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
       $$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \tag{1}$$
    2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
       $$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{2}$$
    3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
       $$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \tag{3}$$
       $$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \tag{4}$$
       $$\neg\neg A \equiv A \tag{5}$$
    4. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias
       $$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{6}$$
       $$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \tag{7}$$

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

$$\begin{array}{lll} & \neg(p \wedge (q \rightarrow r)) & \\ \equiv & \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) & [\text{por } (2)] \\ \equiv & \neg p \vee \neg(\neg q \vee r) & [\text{por } (3)] \\ \equiv & \neg p \vee (\neg\neg q \wedge \neg r) & [\text{por } (4)] \\ \equiv & \neg p \vee (q \wedge \neg r) & [\text{por } (5)] \\ \equiv & (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) & [\text{por } (6)] \end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$:

$$\begin{array}{lll} & (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) & \\ \equiv & (\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p) & [\text{por } (2)] \\ \equiv & \neg p \vee q \vee \neg q \vee p & \end{array}$$

Formas normales: Cálculo de forma normal conjuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FNC de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

$$
\begin{array}{lll}
 & (p \leftrightarrow q) \rightarrow r & \\
\equiv & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow r & \text{[por (1)]} \\
\equiv & \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee r & \text{[por (2)]} \\
\equiv & (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)) \vee r & \text{[por (3)]} \\
\equiv & ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p)) \vee r & \text{[por (4)]} \\
\equiv & ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)) \vee r & \text{[por (5)]} \\
\equiv & (((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee \neg p)) \vee r & \text{[por (6)]} \\
\equiv & (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \wedge ((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p))) \vee r & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (((p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)) \vee r) \wedge (((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee r) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (((p \vee q) \vee r) \wedge ((\neg q \vee q) \vee r)) \wedge (((p \vee \neg p) \vee r) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \vee r)) & \text{[por (7)]} \\
\equiv & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r) & \\
\equiv & (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r) &
\end{array}
$$

Formas normales: Forma normal disyuntiva

- **Forma normal disyuntiva:**
  - Def.: Una fórmula está en forma normal disyuntiva (FND) si es una disyunción de conjunciones de literales; es decir, es de la forma
    $(L_{1,1} \wedge \ldots \wedge L_{1,n_1}) \vee \ldots \vee (L_{m,1} \wedge \ldots \wedge L_{m,n_m})$.
  - Ejemplos: $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p)$ está en FNC
    $(\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow p)$ no está en FNC
  - Def.: Una fórmula G es una forma normal disyuntiva (FND) de la fórmula F si G está en forma normal disyuntiva y es equivalente a F.
  - Ejemplo: Una FND de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ es $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$.

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- **Algoritmo de cálculo de forma normal disyuntiva:**
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula F los siguientes pasos se obtiene una forma normal disyuntiva de F:
    1. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
       $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$ (1)
    2. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
       $A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$ (2)
    3. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
       $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$ (3)
       $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$ (4)
       $\neg\neg A \equiv A$ (5)
    4. Interiorizar las conjunciones usando las equivalencias
       $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$ (6)
       $(A \lor B) \land C \equiv (A \land C) \lor (B \land C)$ (7)

Formas normales: Cálculo de forma normal disyuntiva

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(p \land (q \rightarrow r))$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(p \land (q \rightarrow r)) & \\
\equiv & \neg(p \land (\neg q \lor r)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg p \lor \neg(\neg q \lor r) & [\text{por } (3)] \\
\equiv & \neg p \lor (\neg\neg q \land \neg r) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & \neg p \lor (q \land \neg r) & [\text{por } (5)]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una FND de $\neg(\neg p \lor \neg q \rightarrow \neg(p \land q))$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg(\neg p \lor \neg q \rightarrow \neg(p \land q)) & \\
\equiv & \neg(\neg(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(p \land q)) & [\text{por } (2)] \\
\equiv & \neg\neg(\neg p \lor \neg q) \land \neg\neg(p \land q) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & (\neg p \lor \neg q) \land (p \land q) & [\text{por } (5)] \\
\equiv & (\neg p \land (p \land q)) \lor (\neg q \land (p \land q)) & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q) &
\end{array}
$$

Decisión de tautologicidad mediante FNC

- **Literales complementarios:**
  - El complementario de un literal L es $L^c = \begin{cases} \neg p & \text{si } L = p; \\ p & \text{si } L = \neg p \end{cases}$
- **Propiedades de reducción de tautologías**
  - $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ es una tautología syss $F_1, \ldots, F_n$ lo son.
  - $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ es una tautología syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ contiene algún par de literales complementarios (i.e. existen i, j tales que $L_i = L_j^c$)
- **Decisión de tautologías mediante FNC**
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FNC de F.
    2. Decidir si cada una de las conjunciones de la FNC tiene algún par de literales complementarios.

Decisión de tautologicidad mediante FNC

- **Ejemplos de decisión de tautologías mediante FNC**
  - $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$ no es tautología

    $\text{FNC}(\neg(p \wedge (q \rightarrow r))) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

    Contramodelos de $\neg(p \wedge (q \rightarrow r))$:

    v_1 tal que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$

    v_2 tal que $v_2(p) = 1$ y $v_2(r) = 1$
  - $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ es tautología:

    $\text{FNC}((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)) = \neg p \vee q \vee \neg q \vee p$
  - $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ no es tautología:

    $\text{FNC}((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)$

    Contramodelos de $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$:

    v_1 tal que $v_1(p) = 0, v_1(q) = 0$ y $v_1(r) = 0$

    v_2 tal que $v_2(p) = 1, v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- **Propiedades de reducción de satisfacibilidad**
  - $F_1 \lor \ldots \lor F_n$ es satisfacible syss alguna de las fórmulas $F_1, \ldots, F_n$ lo es.
  - $L_1 \land \ldots \land L_n$ es satisfacible syss $\{L_1, \ldots, L_n\}$ no contiene ningún par de literales complementarios.
- **Decisión de satisfacibilidad mediante FND**
  - Entrada: Una fórmula F.
  - Procedimiento:
    1. Calcular una FND de F.
    2. Decidir si alguna de las disyunciones de la FND no tiene un par de literales complementarios.

Decisión de satisfacibilidad mediante FND

- **Ejemplos de decisión de satisfacibilidad mediante FND**
  - $\neg(p \land (q \to r))$ es satisfacible:

    $\text{FND}(\neg(p \land (q \to r))) = \neg p \lor (q \land \neg r)$

    Modelos de $\neg(p \land (q \to r))$:

    v_1 tal que $v_1(p) = 0$

    v_2 tal que $v_2(q) = 1$ y $v_2(r) = 0$
  - $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))$ es insatisfacible:

    $\text{FND}(\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))) = (\neg p \land p \land q) \lor (\neg q \land p \land q)$

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000)

  Cap. 8 (Equivalencia lógica) y 10 (Formas normales).

- M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)

  Cap. 2 (Propositional calculus: formulas, models, tableaux).

- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002)

  Cap. 3 (Semántica formal. Consecuencia lógica).

- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000)

  Cap. 1 (Propositional logic).

- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)

  Cap. 4.4 (Formas normales).

Capítulo 3

Tableros semánticos

Tema 3: Tableros semánticos

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Demostración por tableros semánticos

- **Demostración de fórmula tautológica:**
  - **Demostración:**

$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$ es una tautología
syss $\{\neg(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))\}$ es inconsistente
syss $\{\neg p \vee \neg q, \neg\neg(p \wedge q)\}$ es inconsistente
syss $\{\neg p \vee \neg q, p \wedge q\}$ es inconsistente
syss $\{p, q, \neg p \vee \neg q\}$ es inconsistente
syss $\{p, q, \neg p\}$ es inconsistente y
$\{p, q, \neg q\}$ es inconsistente

Demostración por tableros semánticos

- Tablero semántico cerrado:

$$\{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land q)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\neg p \lor \neg q, p \land q\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\neg p \lor \neg q, p, q\}$$
$$\swarrow \qquad \searrow$$
$$\{\neg p, p, q\} \qquad \{\neg q, p, q\}$$

Cerrado　　Cerrado

Refutación por tableros semánticos

- Refutación de fórmula no tautológica:
  - Refutación:

    $\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$ es una tautología
    syss $\{\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))\}$ es inconsistente
    syss $\{\neg p \lor \neg q, \neg\neg(p \land r)\}$ es inconsistente
    syss $\{\neg p \lor \neg q, p \land r\}$ es inconsistente
    syss $\{p, r, \neg p \lor \neg q\}$ es inconsistente
    syss $\{p, r, \neg p\}$ es inconsistente y
    $\{p, r, \neg q\}$ es inconsistente
  - Contramodelos de $\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$:

    Las valoraciones v tales que $v(p) = 1, v(q) = 0$ y $v(r) = 1$.
  - Una forma normal disyuntiva de $\neg(\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r))$:

    $p \lor r \lor \neg q$

Refutación por tableros semánticos

- Tablero semántico:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \{\neg(\neg p \vee \neg q \to \neg(p \wedge r))\} \arrow[d] & \\
& \{\neg p \vee -q, \neg\neg(p \wedge r)\} \arrow[d] & \\
& \{\neg p \vee \neg q, p \wedge r\} \arrow[d] & \\
& \{\neg p \vee \neg q, p, r\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\{\neg p, p, r\} & & \{\neg q, p, r\} \\
\text{Cerrado} & & \text{Abierto}
\end{tikzcd}
$$

Notación uniforme: Literales y dobles negaciones

- Literales
  - Un literal es un átomo o la negación de un átomo (p.e. $p, \neg p, q, \neg q, \ldots$).
- Dobles negaciones
  - F es una doble negación si es de la forma $\neg\neg G$.
  - Ley de doble negación: Si F es $\neg\neg G$, entonces $F \equiv G$.

Notación uniforme: fórmulas alfa y beta

- **Fórmulas alfa**
  - Las fórmulas alfa, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$A_1 \land A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \lor A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$A_1 \leftrightarrow A_2$	$A_1 \to A_2$	$A_2 \to A_1$

  - Si F es una fórmula alfa y sus componentes son F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \land F_2$.
- **Fórmulas beta**
  - Las fórmulas beta, junto con sus componentes, son

F	F_1	F_2
$B_1 \lor B_2$	B_1	B_2
$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2
$\neg(B_1 \land B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$\neg(B_1 \leftrightarrow B_2)$	$\neg(B_1 \to B_2)$	$\neg(B_2 \to B_1)$

  - Si F es una fórmula beta y sus componentes son F_1 y F_2, entonces $F \equiv F_1 \lor F_2$.

Completación de tableros

- Procedimiento de completación de tableros:
  Un tablero de un conjunto de fórmulas S es un árbol construido mediante las reglas:
  * El árbol cuyo único nodo tiene como etiqueta S es un tablero de S.
  * Sea $\mathcal{T}$ un tablero de S y S_1 la etiqueta de una hoja de $\mathcal{T}$.
    1. Si S_1 cerrado (es decir, es un conjunto de literales que contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con `cerrado` es un tablero de S.
    2. Si S_1 es abierto (es decir, es un conjunto de literales que no contiene una fórmula y su negación), entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con `abierto` es un tablero de S.
    3. Si S_1 contiene una doble negación $\neg\neg F$, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{\neg\neg F\}) \cup \{F\}$ es un tablero de S.
    4. Si S_1 contiene una fórmula alfa F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijo de S_1 el nodo etiquetado con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1, F_2\}$ es un tablero de S.
    5. Si S_1 contiene una fórmula beta F de componentes F_1 y F_2, entonces el árbol obtenido añadiendo como hijos de S_1 los nodos etiquetados con $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_1\}$ y $(S_1 \setminus \{F\}) \cup \{F_2\}$ es un tablero de S.

Teorema por tableros

- Def.: Un tablero completo de S es un tablero de S al que no se le puede aplicar ninguna de las reglas de expansión; es decir, todas sus hojas son abiertas o cerradas.
- Def.: Un tablero es cerrado si todas sus hojas están etiquetadas con `cerrado`.
- Def.: Una fórmula F es un teorema (mediante tableros semánticos) si tiene una prueba mediante tableros; es decir, si $\{\neg F\}$ tiene un tablero completo cerrado.
  Se representa por $\vdash_{Tab} F$.
- Ejemplos:
  $\vdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$
  $\not\vdash_{Tab} \neg p \lor \neg q \to \neg(p \land r)$
- Teor.: El cálculo de tableros semánticos es adecuado y completo; es decir,
  Adecuado: $\vdash_{Tab} F \quad \Longrightarrow \quad \models F$
  Completo: $\models F \quad \Longrightarrow \quad \vdash_{Tab} F$
- Tableros y formas normales disyuntivas: Si $\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}$ son los nodos abiertos del tablero completo de F, entonces una forma normal disyuntiva de F es $(L_{1,1} \land \dots \land L_{1,n_1}) \lor \dots \lor (L_{m,1} \land \dots \land L_{m,n_m})$.

Deducción por tableros

- Def.: La fórmula F es deducible (mediante tableros semánticos) a partir del conjunto de fórmulas S si existe una prueba mediante tableros de F a partir de S; es decir, existe un tablero completo cerrado de $S \cup \{\neg F\}$.
  Se representa por $S \vdash_{Tab} F$
- Ejemplo: $\{p \to q, q \to r\} \vdash_{Tab} p \to r$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \{\neg(p \to r), p \to q, q \to r\} \arrow[d] & & \\
 & & \{p, \neg r, p \to q, q \to r\} \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
\{\neg p, p, \neg r, q \to r\} \arrow[d] & & & \{q, p, \neg r, q \to r\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Cerrado} & & \{\neg q, q, p, \neg r\} \arrow[d] & & \{r, q, p, \neg r\} \arrow[d] \\
 & & \text{Cerrado} & & \text{Cerrado}
\end{tikzcd}
$$

- Teor.: $S \vdash_{Tab} F$ syss $S \models F$.

Deducción por tableros

- Ejemplo: $\{p \lor q\} \not\vdash_{Tab} p \land q$

$$\{p \lor q, \neg(p \land q)\}$$

$$\{p, \neg(p \land q)\} \qquad \{q, \neg(p \land q)\}$$

$\{p, \neg p\}$	$\{p, \neg q\}$	$\{q, \neg p\}$	$\{q, \neg q\}$
cerrado	abierto	abierto	cerrado

- Contramodelos de $\{p \lor q\} \not\vdash_{Tab} p \land q$

  las valoraciones v_1 tales que $v_1(p) = 1$ y $v_1(q) = 0$

  las valoraciones v_2 tales que $v_2(p) = 0$ y $v_2(q) = 1$

Bibliografía

- Ben–Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.)* (Springer, 2001)
  - Cap. 2: Propositional calculus: formulas, models, tableaux
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995)
  - Cap. 3: Semantic tableaux aund resolution
- Hortalá, M.T.; Leach, J. y Rogríguez, M. *Matemática discreta y lógica matemática* (Ed. Complutense, 1998)
  - Cap. 7.9: Tableaux semánticos par la lógica de proposiciones
- Nerode, A. y Shore, R.A. *Logic for Applications* (Springer, 1997)
  - Cap. 1.4: Tableau proofs in propositional calculus
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
  - Cap. 4.3: Métodos de las tablas semánticas

Capítulo 4

Lógica clausual. Resolución proposicional

Tema 4: Lógica clausal. Resolución

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial

Universidad de Sevilla

Lógica clausal: sintaxis

- **Sintaxis de la lógica clausal**
  - Un átomo es una variable proposicional.
    Variables sobre átomos: $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots$.
  - Un literal es un átomo (p) o la negación de un átomo ($\neg p$).
    Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \dots$.
  - Una cláusula es un conjunto finito de literales.
    Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \dots$.
  - La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
    La cláusula vacía se representa por $\square$.
  - Conjuntos finitos de cláusulas.
    Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \dots$.

Lógica clausal: semántica

- Semántica de la lógica clausal
  - Def.: Una valoración de verdad es una aplicación $v : \mathrm{VP} \longrightarrow \mathbb{B}$.
  - Def.: El valor de un literal positivo p en una valoración v es $v(p)$.
  - Def.: El valor de un literal negativo $\neg p$ en una valoración v es
$$v(\neg p) = \begin{cases} 1, & \text{si } v(p) = 0; \\ 0, & \text{si } v(p) = 1. \end{cases}$$
  - Def.: El valor de una cláusula C en una valoración v es
$$v(C) = \begin{cases} 1, & \text{si existe un } L \in C \text{ tal que } v(L) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
  - Def.: El valor de un conjunto de cláusulas S en una valoración v es
$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{si para toda } C \in S,\ v(C) = 1 \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$
  - Prop.: En cualquier valoración v, $v(\square) = 0$.

Cláusulas y fórmulas

- Equivalencias entre cláusulas y fórmulas
  - Def.: Una cláusula C y una fórmula F son equivalentes si $v(C) = v(F)$ para cualquier valoración v.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y una fórmula F son equivalentes si $v(S) = v(F)$ para cualquier valoración v.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas S y un conjunto de fórmulas $\{F_1, \dots, F_n\}$ son equivalentes si, para cualquier valoración v, $v(S) = 1$ syss v es un modelo de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
- De cláusulas a fórmulas
  - Prop.: La cláusula $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ es equivalente a la fórmula $L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n$.
  - Prop.: El conjunto de cláusulas $\{\{L_{1,1}, \dots, L_{1,n_1}\}, \dots, \{L_{m,1}, \dots, L_{m,n_m}\}\}$ es equivalente a la fórmula $(L_{1,1} \vee \dots \vee L_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge (L_{m,1} \vee \dots \vee L_{m,n_m})$.

Cláusulas y fórmulas

- **De fórmulas a cláusulas (forma clausal)**
  - Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas equivalente a F.
  - Prop.: Si $(L_{1,1} \vee \ldots \vee L_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (L_{m,1} \vee \ldots \vee L_{m,n_m})$ es una forma normal conjuntiva de la fórmula F. Entonces, una forma clausal de F es $\{\{L_{1,1}, \ldots, L_{1,n_1}\}, \ldots, \{L_{m,1}, \ldots, L_{m,n_m}\}\}$.
  - Ejemplos:
    * Una forma clausal de $\neg(p \wedge (q \to r))$ es $\{\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}\}$.
    * Una forma clausal de $p \to q$ es $\{\{\neg p, q\}\}$.
    * La cláusula $\{\{\neg p, q\}, \{r\}\}$ es una forma clausal de las fórmulas $(p \to q) \wedge r$ y $\neg\neg r \wedge (\neg q \to \neg p)$.
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equivalente a S.
  - Prop.: Si $S_1, \ldots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \ldots, F_n$, entonces $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \ldots, F_n\}$.

Modelos, consistencia y consecuencia

- **Modelos, consistencia y consecuencia**
  - Def.: Una valoración v es modelo de un conjunto de cláusulas S si $v(S) = 1$.
  - Ej.: La valoración v tal que $v(p) = v(q) = 1$ es un modelo de $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$.
  - Def.: Un conjunto de cláusulas es consistente si tiene modelos e inconsistente, en caso contrario.
  - Ejemplos:
    * $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}\}$ es consistente.
    * $\{\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$ es inconsistente.
  - Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
  - Def.: $S \models C$ si para todo modelo v de S, $v(C) = 1$.

Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas

- Reducción de consecuencia a inconsistencia de cláusulas:
  - Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$.
    * $\{F_1, \dots, F_n\}$ es consistente syss $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es consistente.
    * Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
      1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
      2. $\{F_1, \dots, F_n \neg G\}$ es inconsistente.
      3. $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$ es inconsistente.
  - Ejemplo: $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$ syss
    $\{\{\neg p, q\}, \{\neg q, r\}, \{p\}, \{\neg r\}\}$ es inconsistente.

Regla de resolución

- Reglas de inferencia:
  - Reglas habituales:

    Modus Ponens: $\dfrac{p \to q, \quad p}{q}$ $\qquad \dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{p\}}{\{q\}}$

    Modus Tollens: $\dfrac{p \to q, \quad \neg q}{\neg p}$ $\qquad \dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q\}}{\{\neg p\}}$

    Encadenamiento: $\dfrac{p \to q, \quad q \to r}{p \to r}$ $\qquad \dfrac{\{\neg p, q\}, \quad \{\neg q, r\}}{\{\neg p, r\}}$

  - Regla de resolución proposicional:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\}, \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, , \dots, q_n\}}$$

Regla de resolución

- **Resolventes**
  - Def.: Sean C_1 una cláusula, L un literal de C_1 y C_2 una cláusula que contiene el complementario de L. La resolvente de C_1 y C_2 respecto de L es
    $\mathrm{Res}_L(C_1, C_2) = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$
  - Ejemplos:
    $\mathrm{Res}_q(\{p, q\}, \{\neg q, r\}) = \{p, r\}$
    $\mathrm{Res}_q(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) = \{p, \neg p\}$
    $\mathrm{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{p, \neg q\}) = \{q, \neg q\}$
    $\mathrm{Res}_p(\{q, \neg p\}, \{q, p\}) = \{q\}$
    $\mathrm{Res}_p(\{p\}, \{\neg p\}) = \square$
- **Resolventes de dos cláusulas:**
  - Def.: $\mathrm{Res}(C_1, C_2)$ es el conjunto de las resolventes entre C_1 y C_2
  - Ejemplos:
    $\mathrm{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}) = \{\{p, \neg p\}, \{q, \neg q\}\}$
    $\mathrm{Res}(\{\neg p, q\}, \{p, q\}) = \{\{q\}\}$
    $\mathrm{Res}(\{\neg p, q\}, \{q, r\}) = \emptyset$
  - Nota: $\square \not\in \mathrm{Res}(\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\})$

Demostraciones por resolución

- **Ejemplo de refutación por resolución:**
  - Refutación de $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}$:

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Demostraciones por resolución

- Definiciones
  - Sea S un conjunto de cláusulas.
  - La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
    * $C_i \in S$;
    * existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
  - La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.
  - Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
  - Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S.

Demostraciones por resolución

- Demostraciones por resolución
  - Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y
    S una forma clausal de $\neg F$
    Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
  - Def.: La fórmula F es demostrable por resolución a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
    Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
  - Ejemplo: Demostración por resolución de $p \wedge q$ a partir de $\{p \vee q, p \leftrightarrow q\}$

1	$\{p, q\}$	Hipótesis
2	$\{\neg p, q\}$	Hipótesis
3	$\{p, \neg q\}$	Hipótesis
4	$\{\neg p, \neg q\}$	Hipótesis
5	$\{q\}$	Resolvente de 1 y 2
6	$\{\neg q\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\square$	Resolvente de 5 y 6

Adecuación y completitud de la resolución

- **Propiedades:**
  - Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
  - Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
  - Si el conjunto de cláusulas S es refutable, entonces S es inconsistente.
  - Teor.: El cálculo de resolución es adecuado y completo; es decir,

    Adecuado: $S \vdash_{Res} F \quad \Longrightarrow \quad S \models F$
    Completo: $S \models F \quad \Longrightarrow \quad S \vdash_{Res} F$

Argumentación y resolución

- Problema de los animales: Se sabe que
  1. Los animales con pelo y los que dan leche son mamíferos.
  2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
  3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
  4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

  Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.
- Formalización:

$$\begin{array}{ll} \{ \text{tiene\_pelos} \lor \text{da\_leche} \to \text{es\_mamífero}, & \\ \quad \text{es\_mamífero} \land (\text{tiene\_pezuñas} \lor \text{rumia}) \to \text{es\_ungulado}, & \\ \quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_cuello\_largo} \to \text{es\_jirafa}, & \\ \quad \text{es\_ungulado} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \to \text{es\_cebra}, & \\ \quad \text{tiene\_pelos} \land \text{tiene\_pezuñas} \land \text{tiene\_rayas\_negras} \} & \vdash_{Res} \text{es\_cebra} \end{array}$$

Argumentación y resolución

- Resolución:

1	$\{\neg$ tiene_pelos, es_mamífero$\}$	Hipótesis
2	$\{\neg$ da_leche, es_mamífero$\}$	Hipótesis
3	$\{\neg$es_mamífero, $\neg$tiene_pezuñas, es_ungulado$\}$	Hipótesis
4	$\{\neg$es_mamífero, $\neg$rumia, es_ungulado$\}$	Hipótesis
5	$\{\neg$es_ungulado, $\neg$tiene_cuello_largo, es_jirafa$\}$	Hipótesis
6	$\{\neg$es_ungulado, $\neg$tiene_rayas_negras, es_cebra$\}$	Hipótesis
7	$\{$tiene_pelos$\}$	Hipótesis
8	$\{$tiene_pezuñas$\}$	Hipótesis
9	$\{$tiene_rayas_negras$\}$	Hipótesis
10	$\{\neg$es_cebra$\}$	Hipótesis
11	$\{$es_mamífero$\}$	Resolvente de 1 y 7
12	$\{\neg$tiene_pezuñas, es_ungulado$\}$	Resolvente de 11 y 3
13	$\{$es_ungulado$\}$	Resolvente de 12 y 8
14	$\{\neg$tiene_rayas_negras, es_cebra$\}$	Resolvente de 13 y 6
15	$\{$es_cebra$\}$	Resolvente de 14 y 9
16	$\square$	Resolvente de 15 y 10

Bibliografía

- M. Ben–Ari, *Mathematical logic for computer science (2nd ed.).* (Springer, 2001)
  - Cap. 4: Propositional calculus: resolution and BDDs
- C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving* (Academic Press, 1973)
  - Cap. 5.2: The resolution principle for the proposicional logic
- N.J. Nilsson *Inteligencia artificial (Una nueva síntesis)* (McGraw–Hill, 2001)
  - Cap. 14: La resolución en el cálculo proposicional
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003)
  - Cap. 5.7: El principio de resolución en lógica proposicional
- U. Schöning *Logic for Computer Scientists* (Birkäuser, 1989)
  - Cap. 1.5: Resolution

Capítulo 5

Deducción natural proposicional

Lógica informática Curso 2003–04

Tema 5: Otros sistemas proposicionales

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Sistemas proposicionales

- Sistemas estudiados:
  - Tablas de verdad.
  - Método de Quine.
  - Formas normales.
  - Tableros semánticos.
  - Resolución.
- Otros sistemas proposicionales:
  - Sistemas axiomáticos.
  - Cálculo de secuentes.
  - Deducción natural (DN).

DN: Reglas de la conjunción

- **Reglas de la conjunción:**
  - **Regla de introducción de la conjunción:** $\dfrac{F \quad G}{F \land G} \land i$
  - **Reglas de eliminación de la conjunción:** $\dfrac{F \land G}{F} \land e_1 \qquad \dfrac{F \land G}{G} \land e_2$
  - **Ejemplo:** $p \land q, r \vdash q \land r$:

1 :	p∧q , r	premises
2 :	q	∧e2 1.1
3 :	q∧r	∧i 2,1.2

  - **Adecuación de las reglas de la conjunción:**
    * $\land$i : $\{F, G\} \models F \land G$
    * $\land e_1$: $F \land G \models F$
    * $\land e_2$: $F \land G \models G$

DN: Reglas de la doble negación

- **Reglas de la doble negación**
  - **Regla de eliminación de la doble negación:** $\dfrac{\neg\neg F}{F} \neg\neg e$
  - **Regla de introducción de la doble negación:** $\dfrac{F}{\neg\neg F} \neg\neg i$
  - **Ejemplo:** $p, \neg\neg(q \land r) \vdash \neg p \land r$:

1 :	p , ¬¬(q∧r)	premises
2 :	¬¬p	¬¬i 1.1
3 :	q∧r	¬¬e 1.2
4 :	r	∧e2 3
5 :	¬¬p∧r	∧i 2,4

  - **Adecuación de las reglas de la doble negación:**
    * $\neg\neg$e : $\{\neg\neg F\} \models F$
    * $\neg\neg$i : $\{F\} \models \neg\neg F$

DN: Regla de eliminación del condicional

- **Regla de eliminación del condicional:**
  - Regla de eliminación del condicional: $\dfrac{F \quad F \rightarrow G}{G} \rightarrow e$
  - Ejemplo: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$:

1 :	¬p∧q , ¬p∧q⟶r∨¬p	premises
2 :	r∨¬p	⟶e 1.1,1.2

  - Ejemplo: $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$:

1 :	p , p⟶q , p⟶(q⟶r)	premises
2 :	q	⟶e 1.1,1.2
3 :	q⟶r	⟶e 1.1,1.3
4 :	r	⟶e 2,3

  - Adecuación de la regla de eliminación del condicional: $\{F, F \rightarrow G\} \models G$

DN: Regla derivada de modus tollens (MT)

- **Regla derivada de modus tollens (MT)**
  - Regla derivada de modus tollens (MT): $\dfrac{F \rightarrow G \quad \neg G}{\neg F} MT$
  - Ejemplo: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	p⟶(q⟶r) , p , ¬r	premises
2 :	q⟶r	⟶e 1.2,1.1
3 :	¬q	MT 1.3,2

  - Ejemplo: $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$:

1 :	¬p⟶q , ¬q	premises
2 :	¬¬p	MT 1.2,1.1
3 :	p	¬¬e 2

  - Ejemplo: $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$:

DN: Regla de introducción del condicional

- **Regla de introducción del condicional**
  - Regla de introducción del condicional:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ G \end{array}}}{F \rightarrow G} \rightarrow i$$

  - Ejemplo: $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$:

1 :	p⟶q	premise
2 :	¬q	assumption
3 :	¬p	MT 2,1
4 :	¬q⟶¬p	⟶i 2−3

  - Adecuación de la regla de introducción del condicional:
    Si $F \models G$, entonces $\models F \rightarrow G$.

DN: Regla de introducción del condicional

  - Ejemplo: $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$:

1 :	¬q⟶¬p	premise
2 :	p	assumption
3 :	¬¬p	¬¬i 2
4 :	¬¬q	MT 3,1
5 :	p⟶¬¬q	⟶i 2−4

  - Ejemplo (de teorema): $\vdash p \rightarrow p$:

1 :	p	assumption
2 :	p⟶p	⟶i 1−1

DN: Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$:

1 :	q⟶r	assumption
2 :	¬q⟶¬p	assumption
3 :	p	assumption
4 :	¬¬p	¬¬i 3
5 :	¬¬q	MT 4,2
6 :	q	¬¬e 5
7 :	r	⟶e 6,1
8 :	p⟶r	⟶i 3−7
9 :	(¬q⟶¬p)⟶(p⟶r)	⟶i 2−8
10 :	(q⟶r)⟶((¬q⟶¬p)⟶(p⟶r))	⟶i 1−9

DN: Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$:

1 :	p∧q⟶r	premise
2 :	p	assumption
3 :	q	assumption
4 :	p∧q	∧i 2,3
5 :	r	⟶e 4,1
6 :	q⟶r	⟶i 3−5
7 :	p⟶(q⟶r)	⟶i 2−6

DN: Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $p \to (q \to r) \vdash (p \land q) \to r$:

1 :	$p \to (q \to r)$	premise
2 :	$p \land q$	assumption
3 :	p	$\land$e1 2
4 :	$q \to r$	$\to$e 3,1
5 :	q	$\land$e2 2
6 :	r	$\to$e 5,4
7 :	$(p \land q) \to r$	$\to$i 2−6

DN: Regla de introducción del condicional

- **Ejemplo:** $p \to q \vdash p \land r \to q \land r$:

1 :	$p \to q$	premise
2 :	$p \land r$	assumption
3 :	p	$\land$e1 2
4 :	r	$\land$e2 2
5 :	q	$\to$e 3,1
6 :	$q \land r$	$\land$i 5,4
7 :	$p \land r \to q \land r$	$\to$i 2−6

DN: Reglas de la disyunción

- **Reglas de la disyunción:**
  - Reglas de introducción de la disyunción: $\dfrac{F}{F \lor G}\ \lor i_1 \qquad \dfrac{G}{F \lor G}\ \lor i_2$
  - Regla de eliminación de la disyunción:

$$\frac{F \lor G \quad \boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ H \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} G \\ \vdots \\ H \end{array}}}{H}\ \lor e$$

  - **Ejemplo:** $p \lor q \vdash q \lor p$:

1 :	p∨q	premise
2 :	p	assumption
3 :	q∨p	∨i2 2
4 :	q	assumption
5 :	q∨p	∨i1 4
6 :	q∨p	∨e 1,2−3,4−5

DN: Reglas de la disyunción

- **Ejemplo:** $q \to r \vdash p \lor q \to p \lor r$:

1 :	q⟶r	premise
2 :	p∨q	assumption
3 :	p	assumption
4 :	p∨r	∨i1 3
5 :	q	assumption
6 :	r	⟶e 5,1
7 :	p∨r	∨i2 6
8 :	p∨r	∨e 2,3−4,5−7
9 :	p∨q⟶p∨r	⟶i 2−8

DN: Reglas de la disyunción

- **Ejemplo:** $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$:

1 :	(p∨q)∨r	premise
2 :	p∨q	assumption
3 :	p	assumption
4 :	p∨(q∨r)	∨i1 3
5 :	q	assumption
6 :	q∨r	∨i1 5
7 :	p∨(q∨r)	∨i2 6
8 :	p∨(q∨r)	∨e 2,3−4,5−7
9 :	r	assumption
10 :	q∨r	∨i2 9
11 :	p∨(q∨r)	∨i2 10
12 :	p∨(q∨r)	∨e 1,2−8,9−11

DN: Reglas de la disyunción

- **Ejemplo (distributiva):** $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

1 :	p∧(q∨r)	premise
2 :	p	∧e1 1
3 :	q∨r	∧e2 1
4 :	q	assumption
5 :	p∧q	∧i 2,4
6 :	(p∧q)∨(p∧r)	∨i1 5
7 :	r	assumption
8 :	p∧r	∧i 2,7
9 :	(p∧q)∨(p∧r)	∨i2 8
10 :	(p∧q)∨(p∧r)	∨e 3,4−6,7−9

DN: Regla de copia

- Ejemplo (usando la regla hyp): $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$:

1 :	p	assumption
2 :	q	assumption
3 :	p	hyp 1
4 :	q⟶p	⟶i 2–3
5 :	p⟶(q⟶p)	⟶i 1–4

DN: Reglas de la negación

- **Extensiones de la lógica para usar falso:**
  - Extensión de la sintaxis: $\bot$ es una fórmula proposicional.
  - Extensión de la semántica: $v(\bot) = 0$ en cualquier valoración.
- **Reglas de la negación:**
  - Regla de eliminación de lo falso: $\dfrac{\bot}{F}\ \bot e$
  - Regla de eliminación de la negación: $\dfrac{F \quad \neg F}{\bot}\ \neg e$
  - Adecuación de las reglas de la negación:
    - * $\bot \models F$
    - * $\{F, \neg F\} \models \bot$

DN: Reglas de la negación

- **Ejemplo $\neg p \lor q \vdash p \rightarrow q$:**

1 :	¬p∨q	premise
2 :	¬p	assumption
3 :	p	assumption
4 :	⊥	¬e 2,3
5 :	q	⊥e 4
6 :	p⟶q	⟶i 3−5
7 :	q	assumption
8 :	p	assumption
9 :	q	hyp 7
10 :	p⟶q	⟶i 8−9
11 :	p⟶q	∨e 1,2−6,7−10

DN: Reglas de la negación

- **Regla de introducción de la negación:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} F \\ \vdots \\ \bot \end{array}}}{\neg F}\ \neg i$$

- **Adecuación: Si $F \models \bot$, entonces $\models \neg F$.**
- **Ejemplo: $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$:**

1 :	p⟶q , p⟶¬q	premises
2 :	p	assumption
3 :	q	⟶e 2,1.1
4 :	¬q	⟶e 2,1.2
5 :	⊥	¬e 4,3
6 :	¬p	¬i 2−5

DN: Reglas de la negación

- **Ejemplo:** $p \to \neg p \vdash \neg p$:

1 :	p⟶¬p	premise
2 :	p	assumption
3 :	¬p	⟶e 2,1
4 :	⊥	¬e 3,2
5 :	¬p	¬i 2−4

DN: Reglas de la negación

- **Ejemplo** $p \wedge \neg q \to r, \neg r, p \vdash q$:

1 :	p∧¬q⟶r , ¬r , p	premises
2 :	¬q	assumption
3 :	p∧¬q	∧i 1.3,2
4 :	r	⟶e 3,1.1
5 :	⊥	¬e 1.2,4
6 :	¬¬q	¬i 2−5
7 :	q	¬¬e 6

- **Ejemplo:** $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$:

1 :	p⟶(q⟶r) , p , ¬r	premises
2 :	q⟶r	⟶e 1.2,1.1
3 :	¬q	MT 1.3,2

DN: Reglas del bicondicional

- Regla de introducción del bicondicional: $\dfrac{F \to G \quad G \to F}{F \leftrightarrow G} \leftrightarrow i$
- Ejemplo: $p \land q \leftrightarrow q \land p$:

1 :	p∧q	assumption
2 :	p	∧e1 1
3 :	q	∧e2 1
4 :	q∧p	∧i 3,2
5 :	p∧q⟶q∧p	⟶i 1–4
6 :	q∧p	assumption
7 :	q	∧e1 6
8 :	p	∧e2 6
9 :	p∧q	∧i 8,7
10 :	q∧p⟶p∧q	⟶i 6–9
11 :	p∧q⟷q∧p	⟷i 5,10

DN: Reglas del bicondicional

- Reglas de eliminación del bicondicional: $\dfrac{F \leftrightarrow G}{F \to G} \leftrightarrow \mathrm{e}_1 \qquad \dfrac{F \leftrightarrow G}{G \to F} \leftrightarrow \mathrm{e}_2$
- Ejemplo: $p \leftrightarrow q, p \lor q \vdash p \land q$:

1 :	p⟷q , p∨q	premises
2 :	p	assumption
3 :	p⟶q	⟷e1 1.1
4 :	q	⟶e 2,3
5 :	p∧q	∧i 2,4
6 :	q	assumption
7 :	q⟶p	⟷e2 1.1
8 :	p	⟶e 6,7
9 :	p∧q	∧i 8,6
10 :	p∧q	∨e 1.2,2–5,6–9

DN: Reglas derivadas: modus tollens

- Regla derivada de modus tollens (MT): $\dfrac{F \to G \quad \neg G}{\neg F}\ MT$

1 :	$F \longrightarrow G$, $\neg G$	premises
2 :	F	assumption
3 :	G	$\longrightarrow$e 2,1.1
4 :	$\bot$	$\neg$e 1.2,3
5 :	$\neg F$	$\neg$i 2–4

DN: Reglas derivadas: introducción de doble negación

- Regla de introducción de la doble negación: $\dfrac{F}{\neg\neg F}\ \neg\neg\mathrm{i}$

1 :	F	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	$\bot$	$\neg$e 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg$i 2–3

DN: Reglas derivadas: reducción al absurdo (RAA)

• Regla de reducción al absurdo: $\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg F\\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{F}\ RAA$

1 :	$\neg F \to \bot$	premise
2 :	$\neg F$	assumption
3 :	$\bot$	$\to$e 2,1
4 :	$\neg\neg F$	$\neg$i 2–3
5 :	F	$\neg\neg$e 4

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

• Ley del tercio excluido (LEM): $\dfrac{}{F \vee \neg F}\ LEM$

1 :	$\neg(F\vee\neg F)$	assumption
2 :	F	assumption
3 :	$F\vee\neg F$	$\vee$i1 2
4 :	$\bot$	$\neg$e 1,3
5 :	$\neg F$	$\neg$i 2–4
6 :	$F\vee\neg F$	$\vee$i2 5
7 :	$\bot$	$\neg$e 1,6
8 :	$\neg\neg(F\vee\neg F)$	$\neg$i 1–7
9 :	$F\vee\neg F$	$\neg\neg$e 8

DN: Reglas derivadas: ley del tercio excluido (LEM)

- **Ejemplo:** $p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$:

1 :	p⟶q	premise
2 :	p∨¬p	LEM
3 :	p	assumption
4 :	q	⟶e 3,1
5 :	¬p∨q	∨i2 4
6 :	¬p	assumption
7 :	¬p∨q	∨i1 6
8 :	¬p∨q	∨e 2,3−5,6−7

DN: Reglas de deducción natural

- **Reglas de deducción natural:**

	Introducción	Eliminación
$\wedge$	$\dfrac{F \quad G}{F \wedge G}\wedge i$	$\dfrac{F \wedge G}{F}\wedge e_1 \qquad \dfrac{F \wedge G}{G}\wedge e_2$
$\vee$	$\dfrac{F}{F \vee G}\vee i_1 \qquad \dfrac{G}{F \vee G}\vee i_2$	$\dfrac{F \vee G \quad \boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ H\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}G\\ \vdots\\ H\end{array}}}{H}\vee e$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ G\end{array}}}{F \rightarrow G}\rightarrow i$	$\dfrac{F \quad F \rightarrow G}{G}\rightarrow e$

DN: Reglas de deducción natural

- Reglas de deducción natural:

	Introducción	Eliminación
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}F\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg F}\ \neg i$	$\dfrac{F \quad \neg F}{\bot}\ \neg e$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{F}\ \bot e$
$\neg\neg$		$\dfrac{\neg\neg F}{F}\ \neg\neg \mathrm{e}$
$\leftrightarrow$	$\dfrac{F \rightarrow G \quad G \rightarrow F}{F \leftrightarrow G}\ \leftrightarrow i$	$\dfrac{F \leftrightarrow G}{F \rightarrow G}\ \leftrightarrow \mathrm{e}_1$ $\quad \dfrac{F \leftrightarrow G}{G \rightarrow F}\ \leftrightarrow \mathrm{e}_2$

- Adecuación y completitud del cálculo de deducción natural.

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) Cap. 16: Cálculo deductivo.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J.A. Díez *Iniciación a la Lógica*, (Ariel, 2002) Cap. 4: Cálculo deductivo. Deducibilidad.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) Cap. 1: Propositional logic.
- Fitting, M. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving (2nd ed.)* (Springer, 1995) Cap. 4.2: Natural deduction.
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) Cap. 3.6: El método de la Deducción Natural

Capítulo 6

Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

LÓGICA INFORMÁTICA CURSO 2003–04

Tema 6: Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Limitación expresiva de la lógica proposicional

- Ejemplo 1: ***Si Sevilla es vecina de Cádiz, entonces Cádiz es vecina de Sevilla. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla***
- Representación en lógica proposicional:

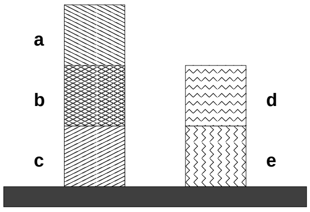
  $\{SvC \to CvS, \quad SvC\} \models CvS$
- Ejemplo 2: ***Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla***
- Representación en lógica proposicional: Imposible
- Representación en lógica de primer orden:

  $\{(\forall x)(\forall y)[vecina(x,y) \to vecina(y,x)], \quad vecina(Sevilla, Cadiz)\}$

  $\models vecina(Cadiz, Sevilla)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- **Mundo de los bloques**



- $sobre(x, y)$ se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
- $sobre\_mesa(x)$ se verifica si el bloque x está sobre la mesa
- Situación del ejemplo:

  $sobre(a, b), sobre(b, c), sobre\_mesa(c), sobre(d, e), sobre\_mesa(e)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- $bajo(x, y)$ se verifica si el bloque x está debajo del bloque y

  $(\forall x)(\forall y)[bajo(x, y) \leftrightarrow sobre(y, x)]$
- $encima(x, y)$ se verifica si el bloque x está encima del bloque y pudiendo haber otros bloques entre ellos

  $(\forall x)(\forall y)[encima(x, y) \leftrightarrow sobre(x, y) \lor (\exists z)[sobre(z, x) \land encima(z, y)]]$
- $libre(x)$ se verifica si el bloque x no tiene bloques encima

  $(\forall x)[libre(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)sobre(y, x)]$
- $pila(x, y, z)$ se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa

  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[pila(x, y, z) \leftrightarrow sobre(x, y) \land sobre(y, z) \land sobre\_mesa(z)]$
- Prop.: Si z, y, z es una pila entonces y no está libre

  $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[pila(x, y, z) \rightarrow \neg libre(y)]$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Representación con funciones e igualdad
  - $es\_bloque(x)$ se verifica si x es un bloque
  - $superior(x)$ es el bloque que está sobre el bloque x
  - Situación del ejemplo:

    $es\_bloque(a), es\_bloque(b), es\_bloque(c), es\_bloque(d), es\_bloque(e)$

    $superior(b) = a, superior(c) = b, superior(e) = d$
  - $sobre\_mesa(x)$ se verifica si el bloque x está sobre la mesa

    $(\forall x)[sobre\_mesa(x) \leftrightarrow es\_bloque(x) \wedge \neg(\exists y)superior(y) = x]$
  - $libre(x)$ se verifica si el bloque x no tiene bloques encima

    $(\forall x)[libre(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)superior(x) = y]$
  - $tope(x)$ es el bloque libre que está encima de x

    $(\forall x)[(libre(x) \rightarrow tope(x) = x) \wedge (\neg libre(x) \rightarrow tope(x) = tope(superior(x)))]$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- Ejemplos de formalización:
  - *La Tierra es un planeta:* planeta(Tierra)
  - *La Luna no es un planeta:* ¬planeta(Luna)
  - *La Luna es un satélite:* satélite(Luna)
  - *La Tierra gira alrededor del Sol:* gira(Tierra, Sol)
  - *Todo planeta es un satélite:* $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow \text{satélite}(x)]$
  - *Todo planeta gira alrededor del Sol:* $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow \text{gira}(x, \text{Sol})]$
  - *Algún planeta gira alrededor de la Luna:* $(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \text{gira}(x, \text{Luna})]$
  - *Hay por lo menos un satélite:* $(\exists x)\text{satélite}(x)$
  - *Ningún planeta es un satélite:* $\neg(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \text{satélite}(x)]$
  - *Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo:* $\neg(\exists x)\text{gira}(x, x)$

Potencia expresiva de la lógica de primer orden

- ***Alrededor de los satélites no giran objetos:*** $(\forall x)[\text{satélite}(x) \rightarrow \neg(\exists y)\text{gira}(y,x)]$
- ***Hay exactamente un satélite:*** $(\exists x)[\text{satélite}(x) \wedge (\forall y)[\text{satélite}(y) \rightarrow x = y]]$
- ***La Luna es un satélite de la Tierra:*** satélite(Luna, Tierra)
  [Notar la sobrecarga de la relación satélite]
- ***Todo planeta tiene un satélite:*** $(\forall x)[\text{planeta}(x) \rightarrow (\exists y)\text{satélite}(y,x)]$
- ***La Tierra no tiene satélites:*** $\neg(\exists x)\text{satélite}(x, \text{Tierra})$
- ***Algún planeta no tiene satélites:*** $(\exists x)[\text{planeta}(x) \wedge \neg(\exists y)\text{satélite}(y,x)]$
- ***Sólo los planetas tienen satélites:*** $(\forall x)[(\exists y)\text{satélite}(y,x) \rightarrow \text{planeta}(x)]$
- ***Todo satélite es satélite de algún planeta:***
  $(\forall x)[\text{satélite}(x) \rightarrow (\exists y)(\text{planeta}(y) \wedge \text{satélite}(x,y))]$
- ***La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes:***
  $\neg(\exists x)(\exists y)[\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge \text{gira}(\text{Luna},x) \wedge \text{gira}(\text{Luna},y) \wedge x \neq y]$
- ***Hay exactamente dos planetas:***
  $(\exists x)(\exists y)[\text{planeta}(x) \wedge \text{planeta}(y) \wedge x \neq y \wedge (\forall z)[\text{planeta}(z) \rightarrow (z = x \vee z = y)]]$

Lenguaje de primer orden

- **Lenguaje de primer orden:**
  - Símbolos lógicos:
    - Variables: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$.
    - Conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
    - Cuantificadores: $\forall, \exists$.
    - Símbolo de igualdad: $=$.
  - Símbolos propios:
    - Símbolos de constantes: $a, b, c, \dots, a_1, a_2, \dots$.
    - Símbolos de predicado (con aridad): $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$.
    - Símbolos de función (con aridad): $f, g, h, \dots, f_1, f_2, \dots$.
  - Símbolos auxiliares: “(”, “)”, “,”.
  - Notación:
    – $L, L_1, L_2, \dots$ representan lenguajes de primer orden.
    – Var representa el conjunto de las variables.
  - Los símbolos de predicados de aridad mayor que 1 se llaman de relaciones.

Ejemplos de lenguajes de primer orden

- **Lenguaje del mundo de los bloques:**
  - Símbolos de constantes: a, b, c, d, e
  - Símbolos de predicado (y de relación):
    – de aridad 1: $sobre\_mesa, libre, es\_bloque$
    – de aridad 2: $sobre, bajo, encima$
    – de aridad 3: $pila$
  - Símbolos de función (de aridad 1): $superior, tope$
- **Lenguaje de la aritmética:**
  - Símbolos de constantes: $0, 1$
  - Símbolos de función:
    – monaria: s (siguiente)
    – binarias: $+, \cdot$
  - Símbolo de predicado binario: $<$

Sintaxis: términos

- **Términos**
  - Def. de término de un lenguaje de primer orden L:
    - Las variables son términos de L.
    - Las constantes de L son términos de L.
    - Si f es un símbolo de función n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un término de L.
  - Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,
    1. $+(\cdot(x, 1), s(y))$ es un término, que se suele escribir como $(x \cdot 1) + s(y)$
    2. $+(\cdot(x, <), s(y))$ no es un término
  - Notación:
    – $s, t, t_1, t_2, \dots$ representan términos.
    – Térm(L) representa el conjunto de los términos de L

Sintaxis: fórmulas atómicas

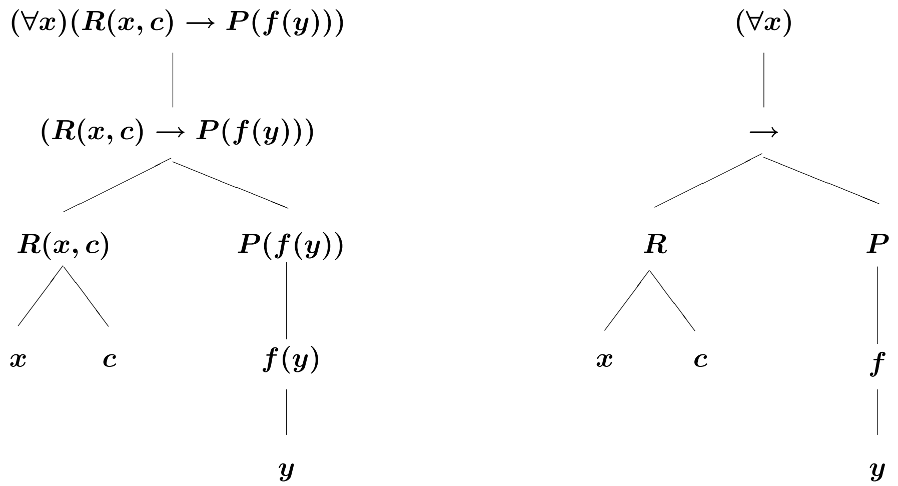
- **Fórmulas atómicas:**
  - Def. de fórmula atómica de un lenguaje de primer orden L:
    - Si t_1 y t_2 son términos de L, entonces $t_1 = t_2$ es una fórmula atómica de L.
    - Si P es un símbolo de relación n–aria de L y $t_1, \dots, t_n$ son términos de L, entonces $P(t_1, \dots, t_n)$ es una fórmula atómica de L.
  - Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,
    1. $< (\cdot(x, 1), s(y))$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x \cdot 1 < s(y)$
    2. $+(x, y) = \cdot(x, y)$ es una fórmula atómica que se suele escribir como $x + y = x \cdot y$
  - Notación:
    - $A, B, A_1, A_2, \dots$ representan fórmulas atómicas.
    - Átom(L) representa el conjunto de las fórmulas atómicas de L

Sintaxis: fórmulas

- **Fórmulas:**
  - Def. de las fórmulas de L:
    - Las fórmulas atómicas de L son fórmulas de L.
    - Si F y G son fórmulas de L, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ y $(F \leftrightarrow G)$ son fórmulas de L.
    - Si F es una fórmula de L, entonces $(\forall x)F$ y $(\exists x)F$ son fórmulas de L.
  - Ejemplo: En el lenguaje de la aritmética,
    1. $(\forall x)(\exists y) < (x, y)$ es una fórmula que se suele escribir como $(\forall x)(\exists y)x < y$
    2. $(\forall x)(\exists y) + (x, y)$ no es una fórmula.
  - Notación:
    - $F, G, H, F_1, F_2, \dots$ representan fórmulas.
    - Fórm(L) representa el conjunto de las fórmulas de L

Sintaxis: fórmulas

- **Árboles de análisis (o de formación) y esquemáticos**



Sintaxis: subfórmulas

- **Subfórmulas:**
  - Def: El conjunto Subf(F) de las subfórmulas de una fórmula F se define recursivamente por:

$$\mathrm{Subf}(F) = \begin{cases} \{F\}, & \text{si } F \text{ es una fórmula atómica;} \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G), & \text{si } F = \neg G; \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G) \cup \mathrm{Subf}(H), & \text{si } F = G * H; \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G), & \text{si } F = (\forall x)G; \\ \{F\} \cup \mathrm{Subf}(G), & \text{si } F = (\exists x)G \end{cases}$$

  - Ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Subf}((\forall x)(R(x,c) \to P(f(y)))) = \{ & (\forall x)(R(x,c) \to P(f(y))), \\ & (R(x,c) \to P(f(y))), \\ & R(x,c), \\ & P(f(y))\} \end{aligned}$$

Sintaxis: omisión de paréntesis

- Criterios de reducción de paréntesis:
  - Pueden eliminarse los paréntesis externos.

    $F \land G$ es una abreviatura de $(F \land G)$
  - Precedencia de asociación de conectivas y cuantificadores: $\forall, \exists, \neg, \land, \lor, \to, \leftrightarrow$.

    $\forall x P(x) \to Q(x)$ es una abreviatura de $((\forall x)P(x)) \to Q(x)$
  - Cuando una conectiva se usa repetidamente, se asocia por la derecha.

    $F \lor G \lor H$ es una abreviatura de $(F \lor (G \lor H))$
    $F \land G \land H \to \neg F \lor G$ es una abreviatura de $((F \land (G \land H)) \to (\neg F \lor G))$
  - Los símbolos binarios pueden escribirse en notación infija.

    $x + y$ es una abreviatura de $+(x, y)$
    $x < y$ es una abreviatura de $< (x, y)$

Sintaxis: conjuntos de variables

- Conjuntos de variables:
  - Def.: El conjunto de las variables de un término t se define recursivamente por:

$$V(t) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } t \text{ es una constante;} \\ \{x\}, & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ V(t_1) \cup \ldots \cup V(t_n), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

  - Def.: El conjunto de las variables de una fórmula F se define recursivamente por:

$$V(F) = \begin{cases} V(t_1) \cup V(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ V(t_1) \cup \ldots \cup V(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \ldots, t_n); \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ V(G) \cup V(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ V(G), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

  - Ejemplos:
    - El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(x, c) \to P(f(y)))$ es $\{x, y\}$.
    - El conjunto de las variables de $(\forall x)(R(a, c) \to P(f(y)))$ es $\{y\}$.

Sintaxis: apariciones libres y ligadas

- **Apariciones libres y ligadas:**
  - Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es ligada si es en una subfórmula de F de la forma $(\forall x)G$ ó $(\exists x)G$.
  - Def.: Una aparición (u ocurrencia) de la variable x en la fórmula F es libre si no es ligada
  - Ejemplo: Las apariciones ligadas son las subrayadas:

    $(\forall x)(P(\underline{x}) \to R(\underline{x}, y)) \to ((\exists y)P(\underline{y}) \to R(z, x))$

    $(\exists x)R(\underline{x}, y) \lor (\forall y)P(\underline{y})$

    $(\forall x)(P(\underline{x}) \to (\exists y)R(\underline{x}, \underline{y}))$

    $P(x) \to R(x, y)$

Sintaxis: variables libres y ligadas

- **Variables libres y ligadas:**
  - Def.: La variable x es libre en F si tiene una aparición libre en F.
  - Def.: La variable x es ligada en F si tiene una aparición ligada en F.
  - Prop.: El conjunto de las variables libres de una fórmula F es:

$$\mathrm{VL}(F) = \begin{cases} \mathrm{V}(t_1) \cup \mathrm{V}(t_2), & \text{si } F \text{ es } t_1 = t_2; \\ \mathrm{V}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{V}(t_n), & \text{si } F \text{ es } P(t_1, \ldots, t_n); \\ \mathrm{VL}(G), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ \mathrm{VL}(G) \cup \mathrm{VL}(H), & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\forall x)G; \\ \mathrm{VL}(G) \setminus \{x\}, & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \end{cases}$$

  - Ejemplo:

Fórmula	Ligadas	Libres
$(\forall x)(P(x) \to R(x, y)) \to ((\exists y)P(y) \to R(x, z))$	x, y	x, y, z
$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x, y))$	x, y	
$(\forall z)(P(x) \to R(x, y))$		x, y

Sintaxis: fórmulas cerradas y básicas

- **Fórmula cerradas:**
  - Def.: Una fórmula cerrada (o sentencia) es una fórmula sin variables libres.
  - Ejemplos: $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y))$ es cerrada.
    $(\exists x)R(x,y) \lor (\forall y)P(y)$ no es cerrada.
- **Fórmulas básicas:**
  - Def.: Una fórmula básica es una fórmula sin variables.
  - Ejemplos: $P(a) \to R(a,b)$ es básica.
    $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y))$ no es básica.

Sintaxis: sustituciones

- **Sustituciones (de un lenguaje):**
  - Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación $\sigma : \text{Var} \to \text{Térm}(L)$.
  - Ejemplo: La aplicación σ de Var en los términos de la aritmética tal que
    $\sigma(x) = s(0), \sigma(y) = x + y$ y $\sigma(z) = z$ para $z \in \text{Var} \setminus \{x, y\}$
    es una sustitución.
  - Notación: $[x_1/t_1, x_2/t_2, \dots, x_n/t_n]$ representa la sustitución σ definida por
    $$\sigma(x) = \begin{cases} t_i, & \text{si } x \text{ es } x_i; \\ x, & \text{si } x \notin \{x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
  - Ejemplo: La sustitución del ejemplo anterior se representa por
    $[x/s(0), y/x + y]$
  - Notación: $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ representarán sustituciones.

Sintaxis: Aplicación de sustituciones a términos

- **Aplicación de sustituciones a términos:**
  - Def.: $t[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es el término obtenido sustituyendo en t las apariciones de x_i por t_i.
  - Def.: La extensión de σ a términos es la aplicación $\sigma : \text{Térm}(L) \to \text{Térm}(L)$ definida por

$$t\sigma = \begin{cases} c, & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ \sigma(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ f(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

  - Si $\sigma = [x/f(y,a), y/z]$, entonces
    - $a\sigma = a$, donde a es una constante.
    - $w\sigma = w$, donde w es una variable distinta de x e y.
    - $h(a,x,w)\sigma = h(a\sigma, x\sigma, w\sigma) = h(a, f(y,a), w)$
    - $f(x,y)\sigma = f(x\sigma, y\sigma) = f(f(y,a), z)$
    - $h(a, f(x,y), w)\sigma = h(a\sigma, f(x,y)\sigma, w\sigma) = h(a, f(f(y,a), z), w)$

Sintaxis: Composición de sustituciones

- **Composición de sustituciones:**
  - Diferencia entre sustituciones simultáneas y consecutivas:
    - $g(x,z)[x/g(z,b), z/a] = g(g(z,b), a)$
    - $g(x,z))[x/g(z,b)][z/a] = g(g(z,b), z)[z/a] = g(g(a,b), a)$
  - Cálculo de la composición: Si $\sigma_1 = [x/f(z,a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
    - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z,a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$
    - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
    - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
    - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

    Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)]$. Comprobación:

    $h(y,x)\sigma_1\sigma_2 = (h(y,x)\sigma_1)\sigma_2 = h(w, f(z,a))\sigma_2 = h(w\sigma_2, f(z,a)\sigma_2) = h(w, f(g(w),a))$
    $h(y,x)\sigma_1\sigma_2 = h(y,x)[x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)] = h(w, f(g(w),a))$

Sintaxis: Aplicación de sustituciones a fórmulas

- **Aplicación de sustituciones a fórmulas:**
  - Def.: $F[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es la fórmula obtenida sustituyendo en F las apariciones libres de x_i por t_i.
  - Def.: La extensión de σ a fórmulas es la aplicación $\sigma : \text{Fórm}(L) \to \text{Fórm}(L)$ definida por

$$F\sigma = \begin{cases} P(t_1\sigma, \dots, t_n\sigma), & \text{si } F \text{ es la fórmula atómica } P(t_1, \dots, t_n); \\ t_1\sigma = t_2\sigma, & \text{si } F \text{ es la fórmula } t_1 = t_2; \\ \neg(G\sigma), & \text{si } F \text{ es } \neg G; \\ G\sigma * H\sigma, & \text{si } F \text{ es } G * H; \\ (Qx)(G\sigma_x), & \text{si } F \text{ es } (Qx)G \text{ y } Q \in \{\forall, \exists\} \end{cases}$$

donde σ_x es la sustitución definida por

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y \text{ es } x; \\ \sigma(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$

Sintaxis: Aplicación de sustituciones a fórmulas

- Ejemplos: Si $\sigma = [x/f(y), y/b]$, entonces

1. $$\begin{aligned} ((\forall x)(Q(x) \to R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \to R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \to R(x,y)\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to R(x,b)) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (Q(x) \to (\forall x)R(x,y))\sigma &= Q(x)\sigma \to ((\forall x)R(x,y))\sigma \\ &= Q(f(y)) \to (\forall x)(R(x,y)\sigma_x) \\ &= Q(f(y)) \to (\forall x)R(x,b) \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} ((\forall x)(Q(x) \to (\forall y)R(x,y)))\sigma &= (\forall x)((Q(x) \to (\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x)\sigma_x \to ((\forall y)R(x,y))\sigma_x) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to (\forall y)(R(x,y)\sigma_{xy})) \\ &= (\forall x)(Q(x) \to (\forall y)R(x,y)) \end{aligned}$$

Sintaxis: Sustituciones libres

- **Sustituciones libres:**
  - Def.: Una sustitución se denomina libre para una fórmula cuando todas las apariciones de variables introducidas por la sustitución en esa fórmula resultan libres.
  - Ejemplos:
    - $[y/x]$ no es libre para $(\exists x)(x < y)$
      $(\exists x)(x < y)[y/x] = (\exists x)(x < x)$
    - $[y/g(y)]$ es libre para $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
      $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(y)] = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(g(y))))$
    - $[y/g(x)]$ no es libre para $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))$
      $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(y)))[y/g(x)] = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x, f(g(x))))$
  - Convenio: Al escribir $F\sigma$ supondremos que σ es libre para F.

Semántica: Estructuras, asignaciones e interpretaciones

- Una estructura del lenguaje L es un par $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que:
  - U es un conjunto no vacío, denominado universo de la estructura;
  - I es una función cuyo dominio es el conjunto de símbolos propios de L y tal que
    - si c es una constante de L, entonces $I(c) \in U$
      (i.e. $I(c)$ es un elemento de U);
    - si f es un símbolo de función n–aria ($n > 0$) de L, entonces $I(f) : U^n \rightarrow U$
      (i.e. $I(f)$ es una función n–aria en U);
    - si R es un símbolo de relación n–aria ($n > 0$) de L, entonces $I(R) \subseteq U^n$
      (i.e. $I(R)$ es una relación n–aria en U).
- Una asignación A en una estructura (U, I) es una función $A : \text{Var} \rightarrow U$ que hace corresponder a cada variable del alfabeto un elemento del universo de la estructura.
- Una interpretación de L es un par $(\mathcal{I}, A)$ formado por una estructura $\mathcal{I}$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$.
- Notación: A veces se usa para los valores de verdad V y F en lugar de 1 y 0.

Semántica: Estructuras

- Ejemplos: Sea L el lenguaje de la aritmética cuyos símbolos propios son:
  constante: 0;
  símbolo de función monaria: s;
  símbolo de función binaria: $+$ y
  símbolo de relación binaria: $\leq$
  - Primera estructura de L:
    $U_1 = \mathbb{N}$
    $I_1(0) = 0$
    $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
    $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
    $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$ (menor o igual)
  - Segunda estructura de L:
    $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
    $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
    $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)
    $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$ (concatenación)
    $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1 \text{ es prefijo de } w_2\}$ (prefijo)

Semántica: Estructuras

- Ejemplos (cont.):
  - Tercera estructura de L:
    $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
    $I_3(0) = cerrado$
    $I_3(s) = \{ (abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$
    $I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto), (cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$
    $I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

e	$I_3(s)(e)$
abierto	*cerrado*
cerrado	*abierto*

$I_3(+)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	*abierto*	*abierto*
cerrado	*abierto*	*cerrado*

$I_3(\leq)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	1	0
cerrado	1	1

Semántica: Evaluación de términos

- **Evaluación de términos:**
  - Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A en $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de términos $\mathcal{I}_A : \text{Térm}(L) \to U$ por

$$\mathcal{I}_A(t) = \begin{cases} I(c), & \text{si } t \text{ es una constante } c; \\ A(x), & \text{si } t \text{ es una variable } x; \\ I(f)(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n)), & \text{si } t \text{ es } f(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

  - $\mathcal{I}_A(t)$ se lee "el valor de t en $\mathcal{I}$ respecto de A".
  - Ejemplos: Sean L el lenguaje de la página ?? y t el término $s(+(x, s(0)))$.
    - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & &= I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & &= I(s)(I(+)(3, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(3, I(s)(0))) & &= I(s)(I(+)(3, 1)) = \\ &= I(s)(4) & &= 5 \end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de términos

- Ejemplos (cont.)
  - Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & &= I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(10, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & &= I(s)(I(+)(10, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(10, I(s)(\epsilon))) & &= I(s)(I(+)(10, 1)) = \\ &= I(s)(101) & &= 10111 \end{aligned}$$

  - Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A(t) &= \mathcal{I}_A(s(+(x, s(0)))) & &= I(s)(\mathcal{I}_A(+(x, s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(\mathcal{I}_A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) & &= I(s)(I(+)(A(x), \mathcal{I}_A(s(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(abierto, I(s)(\mathcal{I}_A(0)))) & &= I(s)(I(+)(abierto, I(s)(I(0)))) = \\ &= I(s)(I(+)(abierto, I(s)(cerrado))) & &= I(s)(I(+)(abierto, abierto)) = \\ &= I(s)(abierto) & &= cerrado \end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de términos

- Ejemplo anterior con notación reducida e infija:
  Sean L el lenguaje de la página ?? y t el término $s(x + s(0))$.
  - Si $\mathcal{I}$ es la primera estructura y $A(x) = 3$, entonces
$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(3 +^I s^I(0^I)) = \\ \quad = s^I(3 +^I s^I(0)) & = s^I(3 +^I 1) = \\ \quad = s^I(4) & = 5 \end{array}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la segunda estructura y $A(x) = 10$, entonces
$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(10 +^I s^I(0^I)) = \\ \quad = s^I(10 +^I s^I(\epsilon)) & = s^I(10 +^I 1) = \\ \quad = s^I(101) & = 1011 \end{array}$$
  - Si $\mathcal{I}$ es la tercera estructura y $A(x) = abierto$, entonces
$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_A(s(x+s(0))) & = s^I(abierto +^I s^I(0^I)) = \\ \quad = s^I(abierto +^I s^I(cerrado)) & = s^I(abierto +^I abierto) = \\ \quad = s^I(abierto) & = cerrado \end{array}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Variante de una asignación:**
  - Def.: Sea A una asignación en la estructura (U, I) y $u \in U$. Mediante $A[x/u]$ se representa la asignación definida por
$$A[x/u](y) = \begin{cases} u, & \text{si } y \text{ es } x; \\ A(y) & \text{si } y \text{ es distinta de } x \end{cases}$$
- **Función de verdad de una relación:**
  - Def.: Si R es una relación n–aria en U (i.e. $R \subseteq U^n$), entonces la función de verdad de R es la función $H_R : U^n \to \mathbb{B}$ definida por
$$H_R(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } (u_1, \dots, u_n) \in R; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
- **Función de verdad de la igualdad:**
  - Def.: La función de verdad de la igualdad en U es la función $H_= : U^2 \to \mathbb{B}$ definida por
$$H_=(u_1, u_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } u_1 = u_2; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Evaluación de fórmulas:**
  - Def.: Dada una estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ de L y una asignación A sobre $\mathcal{I}$, se define la función de evaluación de fórmulas $\mathcal{I}_A : \text{Fórm}(L) \to \mathbb{B}$ por
    - Si F es $t_1 = t_2$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_=(\mathcal{I}_A(t_1), I_A(t_2))$
    - Si F es $P(t_1, \dots, t_n)$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_{I(P)}(\mathcal{I}_A(t_1), \dots, \mathcal{I}_A(t_n))$
    - Si F es $\neg G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_\neg(\mathcal{I}_A(G))$
    - Si F es $G * H$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = H_*(\mathcal{I}_A(G), \mathcal{I}_A(H))$
    - Si F es $(\forall x)G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si para todo } u \in U \text{ se tiene } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
    - Si F es $(\exists x)G$, $\quad \mathcal{I}_A(F) = \begin{cases} 1, & \text{si existe algún } u \in U \text{ tal que } \mathcal{I}_{A[x/u]}(G) = 1; \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$
  - $\mathcal{I}_A(F)$ se lee "el valor de F en $\mathcal{I}$ respecto de A".

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists y)P(x, y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(P) = \{(1, 1), (2, 2)\}$ y $A(x) = 1$
  - En notación completa:

$$\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) = \text{V ó } \mathcal{I}_{A[y/2]}P(x, y) = \text{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[y/1]}(x), \mathcal{I}_{A[y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1, 1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \text{V}$.

  - En notación reducida:

$$\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) = \text{V ó } \mathcal{I}_{A[y/2]}P(x, y) = \text{V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[y/1]}P(x, y) &= P^I(A[y/1](x), A[y/1](y)) \\ &= P^I(1, 1) \\ &= \text{V} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_A((\exists y)P(x, y)) = \text{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$

$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$

$\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(x), \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[x/1,y/1](x), A[x/1,y/1](y)) \\ &= H_{I(P)}(1,1) \\ &= \text{V}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

$\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) &= H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}(x), \mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}(y)) \\ &= H_{I(P)}(A[x/2,y/2](x), A[x/2,y/2](y)) \\ &= H_{I(P)}(2,2) \\ &= \text{V}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \text{V}$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo anterior en notación reducida:
  Evaluación de $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$

$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$

$\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}P(x,y) &= P^I(1,1) \\ &= \text{V}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

$\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/2,y/1]}P(x,y) = \text{V}$ ó $\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) = \text{V}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2,y/2]}P(x,y) &= P^I(2,2) \\ &= \text{V}\end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/2]}((\exists y)P(x,y)) = \text{V}$.

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)P(x,y)) = \text{V}$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))) = \text{V} \Leftrightarrow\ & \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \text{V y} \\ & \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \text{V} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \\ & = H_{\to}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x)), \mathcal{I}_{A[x/1]}(Q(g(x), a))) = \\ & = H_{\to}(H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x)), H_{I(Q)}(\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x)), \mathcal{I}_{A[x/1]}(a))) = \\ & = H_{\to}(H_{I(P)}(A[x/1](x)), H_{I(Q)}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/1]}(x)), I(a))) = \\ & = H_{\to}(H_{I(P)}(1), H_{I(Q)}(I(g)(A[x/1](x)), 1)) = \\ & = H_{\to}(\text{F}, H_{I(Q)}(I(g)(1), 1)) = \\ & = H_{\to}(\text{F}, H_{I(Q)}(2, 1)) = \\ & = H_{\to}(\text{F}, \text{F}) = \\ & = \text{V} \end{aligned}$$

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo (cont.)

  $$\begin{aligned} & \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \\ & = H_{\to}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x)), \mathcal{I}_{A[x/2]}(Q(g(x), a))) = \\ & = H_{\to}(H_{I(P)}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x)), H_{I(Q)}(\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(x)), \mathcal{I}_{A[x/2]}(a))) = \\ & = H_{\to}(H_{I(P)}(A[x/2](x)), H_{I(Q)}(I(g)(\mathcal{I}_{A[x/2]}(x)), I(a))) = \\ & = H_{\to}(H_{I(P)}(2), H_{I(Q)}(I(g)(A[x/2](x)), 1)) = \\ & = H_{\to}(\text{V}, H_{I(Q)}(I(g)(2), 1)) = \\ & = H_{\to}(\text{V}, H_{I(Q)}(1, 1)) = \\ & = H_{\to}(\text{V}, \text{V}) = \\ & = \text{V} \end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))) = \text{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo anterior con notación reducida:
  Evaluación de $(\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

  $$\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \mathrm{V} \text{ y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \to Q(g(x), a)) = \mathrm{V} \end{array}$$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \to Q(g(x), a)) &= P^I(1) \to Q^I(g^I(1), a^I) \\ &= \mathrm{F} \to Q^I(2,1) \\ &= \mathrm{F} \to \mathrm{F} \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \to Q(g(x), a)) &= P^I(2) \to Q^I(g^I(2), a^I) \\ &= \mathrm{V} \to Q^I(1,1) \\ &= \mathrm{V} \to \mathrm{V} \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(P(x) \to Q(g(x), a))) = \mathrm{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo: Evaluación de $(\exists x)(P(g(x)) \land Q(x, g(a)))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

  $$\mathcal{I}_A((\exists x)(P(g(x)) \land Q(x, g(a)))) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(g(x)) \land Q(x, g(a))) = \mathrm{V} \text{ ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(g(x)) \land Q(x, g(a))) = \mathrm{V} \end{array}$$

  $$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(g(x)) \land Q(x, g(a))) &= P^I(g^I(1)) \land Q^I(1, g^I(a^I)) \\ &= P^I(2) \land Q^I(1, g^I(1)) \\ &= \mathrm{V} \land Q^I(1,2) \\ &= \mathrm{V} \land \mathrm{V} \\ &= \mathrm{V} \end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\exists x)(P(g(x)) \land Q(x, g(a)))) = \mathrm{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))) = \text{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \wedge Q(x,a)) = \text{V ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \wedge Q(x,a)) = \text{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1]}(P(x) \wedge Q(x,a)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1, a^I) \\ &= \text{F} \wedge Q^I(1,1) \\ &= \text{F} \wedge \text{V} \\ &= \text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/2]}(P(x) \wedge Q(x,a)) &= P^I(2) \wedge Q^I(2, a^I) \\ &= \text{V} \wedge Q^I(2,1) \\ &= \text{V} \wedge \text{F} \\ &= \text{F} \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\exists x)(P(x) \wedge Q(x,a))) = \text{F}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1,2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1,2),(2,2)\}$.

$$\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))) = \text{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \text{V y} \\ \mathcal{I}_{A[x/2]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \text{V} \end{array}$$

$$\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \text{V} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(P(x) \wedge Q(x,y)) = \text{V ó} \\ \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}(P(x) \wedge Q(x,y)) = \text{V} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1,y/1]}(P(x) \wedge Q(x,y)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1,1) \\ &= \text{F} \wedge \text{V} \\ &= \text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A[x/1,y/2]}(P(x) \wedge Q(x,y)) &= P^I(1) \wedge Q^I(1,2) \\ &= \text{F} \wedge \text{V} \\ &= \text{F} \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{I}_{A[x/1]}(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y)) = \text{F}$

Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(x,y))) = \text{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\forall x)g(x) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

  $\mathcal{I}_A((\forall x)g(x) = x) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}g(x) = x = \mathrm{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]}g(x) = x = \mathrm{V}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(x) = x) &= (g^I(1) = 1)\\ &= (2 = 1)\\ &= \mathrm{F}\end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)g(x) = x) = \mathrm{F}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- **Ejemplo:** Evaluación de $(\forall x)g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ respecto de la asignación A tales que $U = \{1, 2\}$, $I(a) = 1$, $I(g) = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $I(P) = \{2\}$ e $I(Q) = \{(1, 2), (2, 2)\}$.

  $\mathcal{I}_A((\forall x)g(g(x)) = x) = \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathcal{I}_{A[x/1]}g(g(x)) = x = \mathrm{V}$ y $\mathcal{I}_{A[x/2]}g(g(x)) = x = \mathrm{V}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/1]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(1)) = 1)\\ &= (g^I(2) = 1)\\ &= (1 = 1)\\ &= \mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A[x/2]}(g(g(x)) = x) &= (g^I(g^I(2)) = 2)\\ &= (g^I(1) = 2)\\ &= (2 = 2)\\ &= \mathrm{V}\end{aligned}$$

  Por tanto, $\mathcal{I}_A((\forall x)g(g(x)) = x) = \mathrm{V}$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Ejemplo de dependencia del universo: Sea G la fórmula $(\forall x)(\exists y)R(y,x)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ V, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ F, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = <$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la estructura: Sea G la fórmula $(\exists x)(\forall y)R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ V, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ F, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \geq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$.
- Ejemplo de dependencia de la asignación: Sea G la fórmula $(\forall y)R(x,y)$, entonces
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ V, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
  - $\mathcal{I}_A(G) =$ F, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Semántica: Evaluación de fórmulas

- Evaluación de fórmulas en las estructuras de las páginas ??–??:

Fórmula	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_3$
$(\forall x)0 \leq x$	V	V	V
$(\forall x)x \leq s(x)$	V	V	F
$(\exists x)s(x) = 0$	F	F	V
$(\exists x)s(x) = x$	F	F	F

Semántica: Evaluación variables libres

- Evaluación y variables libres:
  - Sea t un término de L, F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
    - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables de t, entonces $\mathcal{I}_A(t) = \mathcal{I}_B(t)$.
    - Si A y B son dos asignaciones en $\mathcal{I}$ que coinciden sobre las variables libres de F, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$.
    - Si t no tiene variables, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(t)$.
    - Si F es cerrada, entonces $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_B(F)$ para cualesquiera asignaciones A y B en $\mathcal{I}$. Se suele escribir simplemente $\mathcal{I}(F)$.
    - Si las variables libres de F son $x_1, \dots, x_n$, entonces son equivalentes
      - $\mathcal{I}_A(F) = 1$, para toda asignación A en $\mathcal{I}$.
      - $\mathcal{I}((\forall x_1) \dots (\forall x_n) F) = 1$.

Semántica: Realización de una fórmula

- Realización de una fórmula:
  - Def.: Sean F una fórmula de L, $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de F si $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
      Se representa por $\mathcal{I}_A \models F$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ no es una realización de F si $\mathcal{I}_A(F) = 0$.
      Se representa por $\mathcal{I}_A \not\models F$.
    - F se verifica en $\mathcal{I}$ respecto de A si $\mathcal{I}_A \models F$.
    - F no se verifica en $\mathcal{I}$ respecto de A si $\mathcal{I}_A \not\models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.
    - Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$. entonces
      $$\mathcal{I}_A \models (\forall y) R(x, y),$$
    - Si A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$, entonces
      $$\mathcal{I}_A \not\models (\forall y) R(x, y),$$

Semántica: Satisfacibilidad en una estructura

- Satisfacibilidad en una estructura
  - Def.: Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
    - F es satisfacible en $\mathcal{I}$ si existe alguna asignación A en I tal que $\mathcal{I}_A \models F$.
    - F es insatisfacible en $\mathcal{I}$ si no existe ninguna asignación A en I tal que $\mathcal{I}_A \models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \leq$.
    - $(\forall y)R(x,y)$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
      $\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x,y)$, con $A(x) = 0$.
    - $(\forall x)R(x,y)$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$.
      No existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, se tenga $m \leq n$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = \geq$.
    - $(\forall y)R(x,y)$ es insatisfacible en $\mathcal{I}$.
      No existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tenga $m \geq n$.
    - $(\forall x)R(x,y)$ es satisfacible en $\mathcal{I}$.
      $\mathcal{I}_A \models (\forall y)R(x,y)$, con $A(x) = 0$.

Semántica: Validez en una estructura

- Validez en una estructura
  - Def.: Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
    - F es válida en $\mathcal{I}$ si, para toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A \models F$.
      Se representa por $\mathcal{I} \models F$.
    - F no es válida en $\mathcal{I}$ si, para alguna asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A \not\models F$.
      Se representa por $\mathcal{I} \not\models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) = <$.
    - $\mathcal{I} \models (\exists y)R(x,y)$.
      Si A es una asignación en $\mathcal{I}$, entonces $\mathcal{I}_A \models (\exists y)R(x,y)$
      $I_{A[y/A(x)+1]}(R(x,y)) = \mathrm{V}$
    - $\mathcal{I} \not\models (\forall y)R(x,y)$.
      Sea A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$. Entonces $\mathcal{I}_A \not\models (\forall y)R(x,y)$
      $I_{A[y/3]}(R(x,y)) = \mathrm{F}$

Semántica: Satisfacibilidad y validez en una estructura

- **Satisfacibilidad y validez en una estructura para sentencias**
  - Sea F una sentencia de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
    - F es válida en $\mathcal{I}$ syss F es satisfacible en $\mathcal{I}$.
    - Se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones
      1. F es válida en $\mathcal{I}$.
      2. $\neg F$ es válida en $\mathcal{I}$.
- **Cierres cuantificacionales:**
  - Sea F una fórmula de L, $\mathcal{I}$ una estructura de L y $\{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de las variables libres de F.
    - F es válida en $\mathcal{I}$ syss $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) F$ es válida en $\mathcal{I}$
    - F es satisfacible en $\mathcal{I}$ syss $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible en $\mathcal{I}$

Semántica: Modelo de una fórmula

- **Modelo de una fórmula:**
  - Def.: Sean F una fórmula de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
    - $\mathcal{I}$ es un modelo de F si $\mathcal{I} \models F$.
    - $\mathcal{I}$ no es un modelo de F si $\mathcal{I} \not\models F$.
  - Ejemplos: Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(R) =<$. Entonces $\mathcal{I} \models (\exists y) R(x, y)$. $\quad \mathcal{I} \not\models (\forall y) R(x, y)$.
  - Ejemplos: Sea F la fórmula $(\forall x) f(x, e) = x$. Las siguientes estructuras son modelos de F.
    - (U, I) con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como la suma.
    - (U, I) con $U = \{0, 1\}^*$, $I(e) = \epsilon$ e $I(f)$ la concatenación.
    - (U, I) con $U = \mathbb{B}$, $I(e) = 1$ e $I(f) = H_\wedge$

    Las siguientes estructuras no son modelo de F
    - (U, I) con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 5$ e $I(f)$ como la suma.
    - (U, I) con $U = \mathbb{N}$, $I(e) = 0$ e $I(f)$ como el producto.

Semántica: Satisfacibilidad de una fórmula

- **Satisfacibilidad de una fórmula:**
  - Def.: Sea F una fórmula de L.
    - F es satisfacible si tiene alguna realización (i.e. existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A en $\mathcal{I}$ tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
    - F es insatisfacible si no tiene ninguna realización (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
  - Ejemplos:
    - $(\forall y)R(x, y)$ es satisfacible

      $\mathcal{I}_A((\forall y)R(x, y)) = 1$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 0$.
    - $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)\neg P(x)$ es insatisfacible.

Semántica: Satisfacibilidad y modelo

- **Propiedades:**
  - Sea F una fórmula cerrada. Son equivalentes:
    - F es satisfacible.
    - F tiene modelo.
  - Si F es insatisfacible, entonces no tiene ningún modelo.
  - Existen fórmulas satisfacibles que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.

    Por ejemplo, sea F la fórmula $x \neq y$.

    La fórmula F es satisfacible

    $\mathcal{I}_A(F) = 1$, siendo $\mathcal{I} = (\{p, q\}, I), A(x) = p, A(y) = q$

    La fórmula F no tiene modelo

    Sea $\mathcal{I}$ una estructura. Existe una asignación A en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y)$. Luego, $\mathcal{I}_A(F) = 0$ y $\mathcal{I} \not\models F$.

Semántica: Validez de una fórmula

- Validez de una fórmula:
  - Def.: Sea F una fórmula de L.
    - F es válida si toda estructura de L es modelo de F (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\models F$.
    - F no es válida si alguna estructura de L no es modelo de F (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ y alguna asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 0$). Se representa por $\not\models F$.
  - Ejemplos:
    - $(\exists x)P(x) \lor (\forall x)\neg P(x)$ es válida.
    - $(\forall y)R(x, y)$ no es válida.

      $\mathcal{I}_A((\forall y)R(x, y)) = 0$, siendo $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$, $I(R) = \leq$ y $A(x) = 5$.
    - $(\exists x)(P(x) \to (\forall y)P(y))$ es válida.

Semántica: Satisfacibilidad y validez

- Relaciones entre satisfacibilidad y validez:
  - Prop.: F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.

    F es válida
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$
    $\iff$ $\neg F$ es insatisfacible.
  - Si F es válida, entonces F es satisfacible.

    F es válida
    $\Longrightarrow$ para toda estructura $\mathcal{I}$ y toda asignación A se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
    $\Longrightarrow$ existe una estructura $\mathcal{I}$ y una asignación A tales que $\mathcal{I}_A(F) = 1$
    $\Longrightarrow$ F es satisfacible.
  - F es satisfacible $\not\Longrightarrow$ $\neg F$ es insatisfacible.

    $(\forall x)P(x)$ es satisfacible.
    modelo $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{a\}$

    $\neg(\forall x)P(x)$ es satisfacible.
    modelo $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}$ e $I(P) = \{a\}$

Semántica: Realización de un conjunto de fórmulas

- Notación:
  - $S, S_1, S_2, \ldots$ representarán conjuntos de fórmulas.
- Realización de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L, $\mathcal{I}$ una estructura de L y A una asignación en $\mathcal{I}$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
      Se representa por $\mathcal{I}_A \models S$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ no es una realización de S si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I}_A(F) = 0$.
      Se representa por $\mathcal{I}_A \not\models S$.
  - Ejemplos: Sea $S = \{(\forall y)R(x,y),\ (\forall y)f(x,y) = y\}$.
    - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
    - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$ no es realización de S.
    - $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \mathbb{N}, R^I = \leq, f^I = *, A(x) = 0$ no es realización de S.

Semántica: Consistencia de un conjunto de fórmulas

- Consistencia de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Sea S un conjunto de fórmulas de L.
    - S es consistente si S tiene alguna realización
      (i.e. existe alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ tales que, para toda $F \in S$, $I_A(F) = 1$).
    - S es inconsistente si S no tiene ninguna realización
      (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, existe alguna $F \in S$, tal que $I_A(F) = 0$).
  - Ejemplos:
    - $S = \{(\forall y)R(x,y),\ (\forall y)f(x,y) = y\}$ es consistente .
      $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$ es realización de S.
    - $S = \{P(x) \to Q(x),\ (\exists y)P(y),\ \neg Q(x)\}$ es inconsistente.

Semántica: Modelo de un conjunto de fórmulas

- Modelo de un conjunto de fórmulas:
  - Def.: Sean S un conjunto de fórmulas de L e $\mathcal{I}$ una estructura de L.
    - $\mathcal{I}$ es un modelo de S si para toda $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \models F$ (i.e. para toda $F \in S$ y toda asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 1$). Se representa por $\mathcal{I} \models S$.
    - $\mathcal{I}$ no es un modelo de S si para alguna $F \in S$ se tiene que $\mathcal{I} \not\models F$ (i.e. para alguna $F \in S$ y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene $\mathcal{I}_A(F) = 0$). Se representa por $\mathcal{I} \not\models S$.
  - Ejemplos: Sea $S = \{R(e, y),\ f(e, y) = y\}$.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$ es modelo de S.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$ no es modelo de S.
    - $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = \leq, f^I = *, e^I = 0$ no es modelo de S.
    - $\mathcal{I} = (\{0, 1\}^*, I)$ con $R^I =$ prefijo, $f^I =$ concatenación y $e^I = \epsilon$ es modelo de S.

Semántica: Consistencia y modelo

- Propiedades:
  - Sea S un conjunto de fórmulas cerradas. Son equivalentes:
    - S es consistente.
    - S tiene modelo.
  - Si S es inconsistente, entonces no tiene ningún modelo.
  - Existen conjuntos de fórmulas consistentes que tienen realizaciones, pero no tienen modelos.

    Por ejemplo, sea $S = \{x \neq y\}$.

    El conjunto S es consistente

    $\mathcal{I}_A \models S$, siendo $\mathcal{I} = (\{p, q\}, I), A(x) = p, A(y) = q$

    El conjunto S no tiene modelo

    Sea $\mathcal{I}$ una estructura. Existe una asignación A en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y)$. Luego, $\mathcal{I}_A(x \neq y) = 0$ y $\mathcal{I} \not\models F$.

Semántica: Consecuencia lógica

- Consecuencia lógica:
  - Def.: Sean F una fórmula de L y S un conjunto de fórmulas de L.
    - F es consecuencia lógica de S si todas las realizaciones de S lo son de F.
      (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
      si $\mathcal{I}_A \models S$ entonces $\mathcal{I}_A \models F$).
      (i.e. para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
      si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$).
      Se representa por $S \models F$.
    - F no es consecuencia lógica de S si alguna realización de S no lo es de F.
      (i.e. para alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que
      $\mathcal{I}_A \models S$ y $\mathcal{I}_A \not\models F$).
      (i.e. para alguna estructura $\mathcal{I}$ de L y alguna asignación A en $\mathcal{I}$ se tiene que,
      para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ y $\mathcal{I}_A(F) = 0$).
      Se representa por $S \not\models F$.
    - Se escribe $G \models F$ en lugar de $\{G\} \models F$.
    - Se escribe $G \not\models F$ en lugar de $\{G\} \not\models F$.

Semántica: Consecuencia lógica

- Ejemplos:
  - $(\forall x)P(x) \models P(y)$
  - $P(y) \not\models (\forall x)P(x)$
    $(\mathcal{I}, A)$ con $\mathcal{I} = (U, I), U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}, A(y) = 1$.
  - $(\forall x)P(x) \models (\exists y)P(y)$
  - $(\exists x)P(x) \not\models (\forall y)P(y)$
    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}, P^I = \{1\}$
    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \mathbb{N}$ y $P^I = \{n \in \mathbb{N} : n$ es par
  - $(\exists x)(\forall y)Q(x, y) \models (\forall y)(\exists x)Q(x, y)$
  - $(\forall y)(\exists x)Q(x, y) \not\models (\exists x)(\forall y)Q(x, y)$
    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{1, 2\}, Q^I = \{(1, 1), (2, 2)\}$
    $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \mathbb{N}, Q^I = <$

Semántica: Consecuencia lógica

- Ejemplos:
  - $\{P(x) \to Q(x),\ P(c)\} \models Q(c)$
  - $\{P(x) \to Q(x),\ Q(c)\} \not\models P(c)$
  - $\{P(x) \to Q(x),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$
  - $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$
- Ejemplos: Se consideran las fórmulas
  $F_1 : (\forall x)R(x,x)$,
  $F_2 : (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \to R(y,x))$.
  $F_3 : (\forall x)(\forall y)(R(x,y) \land R(y,x) \to x = y)$,
  - $\{F_2, F_3\} \not\models F_1$
    Contraejemplo: $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $R^I = \{(a, a)\}$
  - $\{F_1, F_2\} \not\models F_3$
    Contraejemplo: $\mathcal{I} = (U, I)$ con $U = \{a, b\}$ y $R^I = U^2$
  - $\{F_1, F_3\} \models F_2$

Semántica: Consecuencia lógica

- Propiedades:
  - $S \models F$ syss $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
    $S \models F$
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
    si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(F) = 1$.
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
    si, para todo $G \in S$, $\mathcal{I}_A(G) = 1$ entonces $\mathcal{I}_A(\neg F) = 0$.
    $\iff$ para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$,
    existe alguna $H \in S \cup \{\neg F\}$ tal que $\mathcal{I}_A(\neg H) = 0$.
    $\iff$ $S \cup \{\neg F\}$ es inconsistente.
  - Sean F una fórmula cerrada de L y S un conjunto de fórmulas cerradas de L. Entonces, F es consecuencia lógica de S syss todos los modelos de S lo son de F.

Semántica: Equivalencia lógica

- Equivalencia lógica
  - Def.: Sean F y G fórmulas de L. F y G son equivalentes si para toda estructura $\mathcal{I}$ de L y toda asignación A en $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}_A(F) = \mathcal{I}_A(G)$.
    Se representa por $F \equiv G$.
  - Ejemplos:
    - $P(x) \not\equiv P(y)$.
      $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $A(x) = 1, A(y) = 2$.
    - $(\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$.
    - $(\forall x)(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x)P(x) \land (\forall x)Q(x)$.
    - $(\exists x)(P(x) \land Q(x)) \equiv (\exists x)P(x) \land (\exists x)Q(x)$.
      $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $P^I = \{1\}$ y $Q^I = \{2\}$.
  - Propiedades: Sean F y G fórmulas cerradas de L.
    - $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
    - $F \equiv G$ syss $F \models G$ y $G \models F$.

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 195–259 y 323–326.
- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 17–26.
- C.–L. Chang y R.C.–T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 26–35.
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 21-27.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 64–87.
- J.H. Gallier *Logic for computer science (foundations of automatic theorem Proving)* (June 2003) pp. 146–186.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 90–109 y 128–140.
- M. Ojeda e I. Pérez de Guzmán *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de primer orden)* (Ágora, 1997) pp. 1–37 y 49–51.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 22–29.

Capítulo 7

Deducción natural en lógica de primer orden

Tema 7: Cálculo deductivo de primer orden

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de eliminación del cuantificador universal**
  - **Regla de eliminación del cuantificador universal:**

    $$\frac{(\forall x)F}{F[x/t]}\ \forall e$$

    donde $[x/t]$ es libre para F.
  - **Nota: Analogía con $\wedge e_1$ y $\wedge e_2$.**
  - **Ejemplo 1: $P(c), (\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(c)$**

1 :	actual y , P(y) , ∀x.(P(x)⟶¬Q(x))	premises
2 :	P(y)⟶¬Q(y)	∀e 1.3,1.1
3 :	¬Q(y)	⟶e 2,1.2

  - **Nota: $(\forall x)(\exists y)(x < y) \not\vdash (\exists y)(y < y)$.**

Reglas del cuantificador universal

- **Regla de introducción del cuantificador universal**
  - **Regla de introducción del cuantificador universal:**

$$\frac{\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{x_0} \\ \quad\vdots \\ \quad \boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{x_0}] \end{array}}}{(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{F}} \ \forall \boldsymbol{i}$$

  donde $\boldsymbol{x_0}$ es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.

  - **Nota: Analogía con $\wedge$i.**
  - **Ejemplo 2:** $(\forall \boldsymbol{x})(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})), (\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vdash (\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∀x.P(x)	premises
2 :	actual i	assumption
3 :	P(i)⟶Q(i)	∀e 1.1,2
4 :	P(i)	∀e 1.2,2
5 :	Q(i)	⟶e 3,4
6 :	∀x.Q(x)	∀i 2–5

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de introducción del cuantificador existencial**
  - **Regla de introducción del cuantificador existencial:**

$$\frac{\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}]}{(\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{F}} \ \exists \boldsymbol{i}$$

  donde $[\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t}]$ es libre para $\boldsymbol{F}$.

  - **Nota: Analogía con $\vee$i$_1$ y $\vee$i$_2$.**
  - **Ejemplo 3:** $(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vdash (\exists \boldsymbol{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

1 :	actual j , ∀x.P(x)	premises
2 :	P(j)	∀e 1.2,1.1
3 :	∃x.P(x)	∃i 2,1.1

Reglas del cuantificador existencial

- **Regla de eliminación del cuantificador existencial**
  - **Regla de eliminación del cuantificador existencial:**

$$\dfrac{(\exists x)F \qquad \boxed{\begin{array}{c} x_0 \quad F[x/x_0] \\ \vdots \\ G \end{array}}}{G}\ \exists e$$

  donde x_0 es una variable nueva, que no aparece fuera de la caja.
  - **Nota: Analogía con $\vee$e.**
  - **Ejemplo 4: $(\forall x)(P(x) \to Q(x)), (\exists x)P(x) \vdash (\exists x)Q(x)$**

1 :	∀x.(P(x)⟶Q(x)) , ∃x.P(x)	premises
2 :	actual i, P(i)	assumptions
3 :	P(i)⟶Q(i)	∀e 1.1,2.1
4 :	Q(i)	⟶e 3,2.2
5 :	∃x.Q(x)	∃i 4,2.1
6 :	∃x.Q(x)	∃e 1.2,2−5

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 5: $(\forall x)(Q(x) \to R(x)), (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$**

1 :	∀x.(Q(x)⟶R(x)) , ∃x.(P(x)∧Q(x))	premises
2 :	actual i, P(i)∧Q(i)	assumptions
3 :	Q(i)⟶R(i)	∀e 1.1,2.1
4 :	Q(i)	∧e 2.2
5 :	R(i)	⟶e 3,4
6 :	P(i)	∧e 2.2
7 :	P(i)∧R(i)	∧i 6,5
8 :	∃x.(P(x)∧R(x))	∃i 7,2.1
9 :	∃x.(P(x)∧R(x))	∃e 1.2,2−8

Reglas del cuantificador existencial

- **Ejemplo 6:** $(\exists x)P(x), (\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \vdash (\forall y)Q(y)$

1 :	∃x.P(x) , ∀x.∀y.(P(x)⟶Q(y))	premises
2 :	actual i	assumption
3 :	actual i1 , P(i1)	assumptions
4 :	∀y.(P(i1)⟶Q(y))	∀e 1.2,3.1
5 :	P(i1)⟶Q(i)	∀e 4,2
6 :	Q(i)	⟶e 5,3.2
7 :	Q(i)	∃e 1.1,3–6
8 :	∀y.Q(y)	∀i 2–7

Equivalencias

- **Equivalencias:**
  - **Sean F y G fórmulas.**

    [1(a)] $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

    [1(b)] $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$

  - **Sean F y G fórmulas y x una varible no libre en G.**

    [2(a)] $(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

    [2(b)] $(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$

    [2(c)] $(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$

    [2(d)] $(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

Equivalencias

- Sean F y G fórmulas.

  [3(a)] $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$

  [3(b)] $(\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

- Sean F y G fórmulas.

  [4(a)] $(\forall x)(\forall y)F \equiv (\forall y)(\forall x)F$

  [4(b)] $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

Equivalencias

- Equivalencia 1(a): $\neg(\forall x)F \vdash (\exists x)\neg F$

1 :	¬∀x.P(x)	premise
2 :	¬∃x.¬P(x)	assumption
3 :	actual i	assumption
4 :	¬P(i)	assumption
5 :	∃x.¬P(x)	∃i 4,3
6 :	⊥	¬e 5,2
7 :	P(i)	RAA 4–6
8 :	∀x.P(x)	∀i 3–7
9 :	⊥	¬e 8,1
10 :	∃x.¬P(x)	RAA 2–9

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $(\exists x)\neg F \vdash \neg(\forall x)F$

1 :	$\exists x.\neg P(x)$	premise
2 :	$\neg\neg\forall x.P(x)$	assumption
3 :	$\forall x.P(x)$	$\neg\neg$e 2
4 :	actual i, $\neg P(i)$	assumptions
5 :	$P(i)$	$\forall$e 3,4.1
6 :	$\bot$	$\neg$e 5,4.2
7 :	$\bot$	$\exists$e 1,4–6
8 :	$\neg\forall x.P(x)$	RAA 2–7

Equivalencias

- **Equivalencia 1(a):** $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$

1 :	$\neg\forall x.P(x)$	assumption
2 :	$\exists x.\neg P(x)$	Conjecture $\neg\forall x.P(x) \vdash \exists x.\neg P(x)$ 1
3 :	$\neg\forall x.P(x) \longrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\exists x.\neg P(x)$	assumption
5 :	$\neg\forall x.P(x)$	Theorem $\exists x.\neg P(x) \vdash \neg\forall x.P(x)$ 4
6 :	$\exists x.\neg P(x) \longrightarrow \neg\forall x.P(x)$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\neg\forall x.P(x) \longleftrightarrow \exists x.\neg P(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)(F \wedge G) \vdash (\forall x)F \wedge (\forall x)G$

1 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	premise
2 :	actual i1	assumption
3 :	P(i1)∧Q(i1)	∀e 1,2
4 :	P(i1)	∧e1 3
5 :	∀x.P(x)	∀i 2−4
6 :	actual i	assumption
7 :	P(i)∧Q(i)	∀e 1,6
8 :	Q(i)	∧e2 7
9 :	∀x.Q(x)	∀i 6−8
10 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	∧i 5,9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)F \wedge (\forall x)G \vdash (\forall x)(F \wedge G)$

1 :	∀x.P(x)∧∀x.Q(x)	premise
2 :	actual i	assumption
3 :	∀x.P(x)	∧e 1
4 :	P(i)	∀e 3,2
5 :	∀x.Q(x)	∧e 1
6 :	Q(i)	∀e 5,2
7 :	P(i)∧Q(i)	∧i 4,6
8 :	∀x.(P(x)∧Q(x))	∀i 2−7

Equivalencias

- **Equivalencia 3(a):** $(\forall x)(F \wedge G) \equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G$

1 :	$\boxed{\forall x.(P(x) \wedge Q(x))}$	assumption
2 :	$\boxed{\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)}$	Theorem $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$ 1
3 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longrightarrow$i 1–2
4 :	$\boxed{\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)}$	assumption
5 :	$\boxed{\forall x.(P(x) \wedge Q(x))}$	Theorem $\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$ 4
6 :	$\forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x) \longrightarrow \forall x.(P(x) \wedge Q(x))$	$\longrightarrow$i 4–5
7 :	$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \longleftrightarrow \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\longleftrightarrow$i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \vee (\exists x)G \vdash (\exists x)(F \vee G)$

1 :	$\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	premise
2 :	$\exists x.P(x)$	assumption
3 :	actual i , P(i)	assumptions
4 :	$P(i) \vee Q(i)$	$\vee$i1 3.2
5 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$i 4,3.1
6 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$e 2,3–5
7 :	$\exists x.Q(x)$	assumption
8 :	actual i1 , Q(i1)	assumptions
9 :	$P(i1) \vee Q(i1)$	$\vee$i2 8.2
10 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$i 9,8.1
11 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\exists$e 7,8–10
12 :	$\exists x.(P(x) \vee Q(x))$	$\vee$e 1,2–6,7–11

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)(F \vee G) \vdash (\exists x)F \vee (\exists x)G$

1 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	premise
2 :	actual i, P(i)∨Q(i)	assumptions
3 :	P(i)	assumption
4 :	∃x.P(x)	∃i 3,2.1
5 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨ intro 4
6 :	Q(i)	assumption
7 :	∃x.Q(x)	∃i 6,2.1
8 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨ intro 7
9 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∨e 2.2,3−5,6−8
10 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	∃e 1,2−9

Equivalencias

- **Equivalencia 3(b):** $(\exists x)F \vee (\exists x)G \equiv (\exists x)(F \vee G)$

1 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	assumption
2 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	Theorem ∃x.P(x)∨∃x.Q(x) ⊢ ∃x.(P(x)∨Q(x)) 1
3 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)⟶∃x.(P(x)∨Q(x))	⟶i 1−2
4 :	∃x.(P(x)∨Q(x))	assumption
5 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	Conjecture ∃x.(P(x)∨Q(x)) ⊢ ∃x.P(x)∨∃x.Q(x) 4
6 :	∃x.(P(x)∨Q(x))⟶∃x.P(x)∨∃x.Q(x)	⟶i 4−5
7 :	∃x.P(x)∨∃x.Q(x)⟷∃x.(P(x)∨Q(x))	⟷i 3,6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists x)(\exists y)F \vdash (\exists y)(\exists x)F$

1 :	∃x.∃y.P(x,y)	premise
2 :	actual i , ∃y.P(i,y)	assumptions
3 :	actual i1 , P(i,i1)	assumptions
4 :	∃x.P(x,i1)	∃i 3.2,2.1
5 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃i 4,3.1
6 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 2.2,3−5
7 :	∃y.∃x.P(x,y)	∃e 1,2−6

Equivalencias

- **Equivalencia 4(b):** $(\exists x)(\exists y)F \equiv (\exists y)(\exists x)F$

1 :	∃x.∃y.P(x,y)	assumption
2 :	∃y.∃x.P(x,y)	Conjecture ∃x.∃y.P(x,y) ⊢ ∃y.∃x.P(x,y) 1
3 :	∃x.∃y.P(x,y)⟶∃y.∃x.P(x,y)	⟶i 1−2
4 :	∃y.∃x.P(x,y)	assumption
5 :	∃x.∃y.P(x,y)	Conjecture ∃x.∃y.P(x,y) ⊢ ∃y.∃x.P(x,y) 4
6 :	∃y.∃x.P(x,y)⟶∃x.∃y.P(x,y)	⟶i 4−5
7 :	∃x.∃y.P(x,y)⟷∃y.∃x.P(x,y)	⟷i 3,6

Reglas de la igualdad

- Regla de eliminación de la igualdad:

  $$\frac{t_1 = t_2 \quad F[x/t_1]}{F[x/t_2]} = e$$

  donde $[x/t_1]$ y $[x/t_2]$ son libres para F.

- Ejemplo:

1	$(x+1) = (1+x)$	premisa
2	$(x+1>1) \rightarrow (x+1>0)$	premisa
3	$(1+x>1) \rightarrow (1+x>0)$	=e 1,2

- Ejemplo: $t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_2 = t_3$	premisa
3	$t_1 = t_3$	=e 2,1

Reglas de la igualdad

- Regla de introducción de la igualdad:

  $$\frac{}{t = t} = i$$

- Ejemplo: $t_1 = t_2, \vdash t_2 = t_1$

1	$t_1 = t_2$	premisa
2	$t_1 = t_1$	=i
3	$t_2 = t_1$	=e 1,2

Bibliografía

- C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal.* (Ariel, 2000) pp. 259–287.
- R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998)
- J. Dingel *Propositional and predicate logic: a review.* (2000) pp. 28–33.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 88–94.
- M. Huth y M. Ryan *Logic in computer science: modelling and reasoning about systems.* (Cambridge University Press, 2000) pp. 109-127.

Capítulo 8

Formas normales. Cláusulas

Tema 8: Formas normales. Cláusulas

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Equivalencias

- **Equivalencia lógica**
  - Prop.: $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.
- **Propiedades básicas de la equivalencia lógica:**
  - Reflexiva: $F \equiv F$
  - Simétrica: Si $F \equiv G$, entonces $G \equiv F$
  - Transitiva: Si $F \equiv G$ y $G \equiv H$, entonces $F \equiv H$
- **Principio de sustitución de fórmulas equivalentes:**
  - Prop.: Si en la fórmula F se sustituye una de sus subfórmulas G por una fórmula G' lógicamente equivalente a G, entonces la fórmula obtenida, F', es lógicamente equivalente a F.
  - Ejemplo: $$\begin{aligned} F &= (\forall x)P(x) \to (\exists x)Q(x) \\ G &= (\forall x)P(x) \\ G' &= (\forall y)P(y) \\ F' &= (\forall y)P(y) \to (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

Forma rectificada

- **Fórmula en forma rectificada:**
  - Def.: F está en forma rectificada si ninguna variable aparece libre y ligada y cada cuantificador se refiere a una variable diferente.
  - Ejemplos: $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(z,y)$ está en forma rectificada
    $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x,y)$ no está en forma rectificada
    $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(z,x)$ no está en forma rectificada
  - Prop.: Para toda fórmula F existe una fórmula equivalente G en forma rectificada.
  - Lema del renombramiento: Si y no aparece libre en F, entonces

    $(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$

    $(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y]$.
  - Ejemplos de rectificación:

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(z,x) \equiv (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall u)Q(z,u)$$
$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall y)Q(x,y) \equiv (\forall z)P(z) \rightarrow (\forall y)Q(x,y)$$

Forma normal prenexa

- **Fórmula en forma normal prenexa**
  - Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa (FNP) si es de la forma $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.

    $(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)$ se llama el prefijo de F y G se llama la matriz de F.
  - Ejemplos:

Fórmula	¿está en FNP?
$\neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)]$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)]$	sí
$(\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$	no
$(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)]$	sí
$(\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)]$	sí
$\neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)])$	no
$(\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))]$	sí

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- **Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa:**
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa rectificada:

1. Rectificar la fórmula usando las equivalencias
   $(\forall x)F \equiv (\forall y)F[x/y]$ (1)
   $(\exists x)F \equiv (\exists y)F[x/y]$ (2)
   donde y es una variable que no ocurre libre en F.
2. Eliminar los bicondicionales usando la equivalencia
   $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$ (3)
3. Eliminar los condicionales usando la equivalencia
   $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ (4)

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Algoritmo (cont.)

4. Interiorizar las negaciones usando las equivalencias
   $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ (5)
   $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$ (6)
   $\neg\neg F \equiv F$ (7)
   $\neg(\forall x)F \equiv (\exists x)\neg F$ (8)
   $\neg(\exists x)F \equiv (\forall x)\neg F$ (9)
5. Exteriorizar los cuantificadores usando las equivalencias
   $(\forall x)F \wedge G \equiv (\forall x)(F \wedge G)$ con x no libre en G. (11)
   $(\forall x)F \vee G \equiv (\forall x)(F \vee G)$ con x no libre en G. (12)
   $(\exists x)F \wedge G \equiv (\exists x)(F \wedge G)$ con x no libre en G. (13)
   $(\exists x)F \vee G \equiv (\exists x)(F \vee G)$ con x no libre en G. (14)
   $G \wedge (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \wedge F)$ con x no libre en G. (15)
   $G \vee (\forall x)F \equiv (\forall x)(G \vee F)$ con x no libre en G. (16)
   $G \wedge (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \wedge F)$ con x no libre en G. (17)
   $G \vee (\exists x)F \equiv (\exists x)(G \vee F)$ con x no libre en G. (18)

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{array}{lll}
 & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] & \\
\equiv & \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)] & [\text{por } (1)] \\
\equiv & \neg(\exists x)[\neg P(x) \lor (\forall y)P(y)] & [\text{por } (4)] \\
\equiv & (\forall x)[\neg(\neg P(x) \lor (\forall y)P(y))] & [\text{por } (9)] \\
\equiv & (\forall x)[\neg\neg P(x) \land \neg(\forall y)P(y)] & [\text{por } (6)] \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \land (\exists y)\neg P(y)] & [\text{por } (7 \text{ y } 8)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \land \neg P(y)] & [\text{por } (17)]
\end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) & \\
\equiv & (\forall x)[P(x) \lor (\exists y)Q(y)] & [\text{por } (12)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \lor Q(y)] & [\text{por } (18)]
\end{array}$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma normal prenexa de

$$\begin{array}{lll}
 & (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) & \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)P(x) \lor Q(y)] & [\text{por } (18)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \lor Q(y)] & [\text{por } (12)]
\end{array}$$

Forma normal prenexa: Cálculo de forma normal prenexa

- Ejemplo de cálculo de una forma normal prenexa de

$$\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)]) & \\
\equiv & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall y)[Q(y) \to R(y)] \to (\forall z)[P(z) \to R(z)]) & [\text{por } (1)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \lor (\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)]) & [\text{por } (4)] \\
\equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land \neg(\forall z)[\neg P(z) \lor R(z)] & [\text{por } (6)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg(\neg P(z) \lor R(z))] & [\text{por } (7, 8)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[\neg\neg P(z) \land \neg R(z)] & [\text{por } (6)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (\exists z)[P(z) \land \neg R(z)] & [\text{por } (7)] \\
\equiv & (\exists z)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (17)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]] \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (11)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\forall y)[\neg Q(y) \lor R(y)]) \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (11)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[(\forall y)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))] \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (15)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(z) \land \neg R(z))] & [\text{por } (11)]
\end{array}$$

Forma normal prenexa conjuntiva

- **Fórmula en forma normal prenexa conjuntiva**
  - Def.: La fórmula F está en forma normal prenexa conjuntiva (FNPC) si es de la forma $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) G$, donde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, $n \geq 0$, G no tiene cuantificadores y G está en forma normal conjuntiva.
- **Algoritmo de cálculo de forma normal prenexa conjuntiva:**
  - Algoritmo: Aplicando a una fórmula los siguientes pasos se obtiene otra fórmula equivalente y que está en forma normal prenexa conjuntiva rectificada:
    1. Calcular una forma normal prenexa rectificada usando las equivalencias (1)–(18)
    2. Interiorizar las disyunciones usando las equivalencias

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (19)$$
$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad (20)$$

  - Ejemplo de cálculo de una FNPC de $(\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))]$:

$$\begin{array}{ll} & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee (Q(y) \wedge \neg R(y))] \\ \equiv & (\forall x)(\exists y)[(P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(x) \vee \neg R(y))] \quad \text{[por (19)]} \end{array}$$

Forma de Skolem

- **Forma de Skolem:**
  - Def.: La fórmula F está en forma de Skolem (FS) si es de la forma $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) G$, donde $n \geq 0$ y G no tiene cuantificadores.
  - Ejemplos:

$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	no está en forma de Skolem
$(\forall x)P(x,f(x))$	sí está en forma de Skolem
$(\exists x)Q(x)$	no está en forma de Skolem
$Q(a)$	sí está en forma de Skolem

- **Equisatisfacibilidad:**
  - Def.: Las fórmulas F y G son equisatisfacible si:
    F es satisfacible syss G es satisfacible.
    Se representa por $F \equiv_{sat} G$
  - Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} (\exists x)Q(x) & \equiv_{sat} & Q(a) \\ (\exists x)Q(x) & \not\equiv & Q(a) \\ (\forall x)(\exists y)P(x,y) & \equiv_{sat} & (\forall x)P(x,f(x)) \\ (\forall x)(\exists y)P(x,y) & \not\equiv & (\forall x)P(x,f(x)) \end{array}$$

Forma de Skolem

- **Propiedades:**
  - Si a es una constante que no ocurre en F, entonces $(\exists x)F \equiv_{sat} F[x/a]$.
  - Si g es un símbolo de función n–aria que no ocurre en F, entonces $(\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)F \equiv_{sat} (\forall x_1)\dots(\forall x_n)F[x/g(x_1,\dots,x_n)]$.
- **Algoritmo de cálculo de forma de Skolem:**
  - Algoritmo: Sea F una fórmula en forma normal prenexa rectificada, la forma de Skolem de F es

$$\text{Sko}(F) = \begin{cases} \text{Sko}(G[x/a]), & \text{si } F \text{ es } (\exists x)G \text{ y } a \text{ es una nueva constante} \\ & \quad \text{que no ocurre en } F \text{ (constante de Skolem);} \\ \text{Sko}(G[x/f(x_1,\dots,x_n)]), & \text{si } F \text{ es } (\forall x_1)\dots(\forall x_n)(\exists x)G \text{ y } f \text{ es un símbolo} \\ & \quad \text{de función } n\text{–aria que no ocurre en } F \\ & \quad \text{(función de Skolem);} \\ F, & \text{si } F \text{ está en forma de Skolem} \end{cases}$$

  - Propiedad: Si F es una fórmula en forma normal prenexa rectificada, entonces $\text{Sko}(F)$ está en forma de Skolem y $\text{Sko}(F) \equiv_{sat} F$.

Forma de Skolem: Cálculo de forma de Skolem

- Ejemplos de cálculo de forma de Skolem:
  - Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} &\text{Sko}((\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)) \\ &= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,u,v,w)) \\ &= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)(\exists w)P(a,y,z,f(y,z),v,w)) \\ &= \text{Sko}((\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v))) \\ &= (\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a,y,z,f(y,z),v,g(y,z,v)) \end{aligned}$$

  - Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} &\text{Sko}((\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \lor Q(f(x),y)]) \\ &= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)(\exists w)[\neg P(a,w) \lor Q(f(x),g_1(h(x)))]) \\ &= \text{Sko}((\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g_2(x,z)) \lor Q(f(x),g_1(h(x)))]) \\ &= (\forall x)(\forall z)[\neg P(a,g_2(x,z)) \lor Q(f(x),g_1(h(x)))] \end{aligned}$$

Forma de Skolem: Cálculo de forma de Skolem

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
& \neg(\exists x)[P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)] \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \wedge \neg P(y)] \quad \text{[por página ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \wedge \neg P(f(x))]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
& (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\forall x)(\exists y)[P(x) \vee Q(y)] \quad \text{[por página ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(f(x)))]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
& (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y) \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[P(x) \vee Q(y)] \quad \text{[por página ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \vee Q(a)]
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma de Skolem de

$$
\begin{array}{ll}
& \neg((\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]) \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(z) \wedge \neg R(z))] \quad \text{[por p. ??]} \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(y) \vee R(y))) \wedge (P(a) \wedge \neg R(a))]
\end{array}
$$

Lógica clausal: sintaxis

- Sintaxis de la lógica clausal
  - Un átomo es una fórnula atómica.
    Variables sobre átomos: $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots$.
  - Un literal es un átomo (A) o la negación de un átomo ($\neg A$).
    Variables sobre literales: $L, L_1, L_2, \ldots$.
  - Una cláusula es un conjunto finito de literales.
    Variables sobre cláusulas: $C, C_1, C_2, \ldots$.
  - La cláusula vacía es el conjunto vacío de literales.
    La cláusula vacía se representa por $\square$.
  - Conjuntos finitos de cláusulas.
    Variables sobre conjuntos finitos de cláusulas: $S, S_1, S_2, \ldots$.

Lógica clausal: semántica

- **Fórmulas correspondientes:**
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\{L_1, \dots, L_n\}$ es
    $$(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[L_1 \vee \dots \vee L_n],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $L_1 \vee \dots \vee L_n$.
  - Def.: La fórmula correspondiente a la cláusula $\square$ es $\bot$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$ es
    $$(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
    donde $x_1, \dots, x_p$ son las variables libres de $(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)$.
  - Def.: La fórmula correspondiente al conjunto de cláusulas $\emptyset$ es $\top$.
- **Semántica:**
  - Def.: En cualquier interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$, $I(\top) = 1$ e $I(\bot) = 0$.
  - Def.: Los conceptos semánticos relativos a las cláusulas y a los conjuntos de cláusulas son los de sus correspondientes fórmulas.

Forma clausal de una fórmula

- **Forma clausal de una fórmula**
  - Def.: Una forma clausal de una fórmula F es un conjunto de cláusulas S tal que $F \equiv_{sat} S$.
  - Algoritmo: Aplicando a la fórmula F los siguientes pasos se obtiene S que una forma clausal de F:
    1. Sea $F_1 = (\exists y_1)\dots(\exists y_n)F$, donde $y_1, \dots, y_n$ son las variables libres de F.
    2. Sea F_2 una forma normal prenexa conjuntiva rectificada de F_1 calculada mediante el algoritmo de la página ??.
    3. Sea $F_3 = \mathrm{Sko}(F_2)$, que tiene la forma
       $$(\forall x_1)\dots(\forall x_p)[(L_1^1 \vee \dots \vee L_{n_1}^1) \wedge \dots \wedge (L_1^m \vee \dots \vee L_{n_m}^m)],$$
    4. Sea $S = \{\{L_1^1, \dots, L_{n_1}^1\}, \dots, \{L_1^m, \dots, L_{n_m}^m\}\}$.
  - Prop.: $F \equiv_{sat} F_1 \equiv F_2 \equiv_{sat} F_3 \equiv S$.

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$
\begin{array}{ll}
& \neg(\exists x)[P(x) \to (\forall x)P(x)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \land \neg P(f(x))] \quad \text{[pág. ??]} \\
\equiv & \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$
\begin{array}{ll}
& (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(f(x)))] \quad \text{[pág. ??]} \\
\equiv & \{\{P(x), Q(f(x)))\}\}
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de otra forma clausal de

$$
\begin{array}{ll}
& (\forall x)P(x) \lor (\exists y)Q(y) \\
\equiv_{sat} & (\forall x)[P(x) \lor Q(a)] \quad \text{[pág. ??]} \\
\equiv & \{\{P(x), Q(a)\}\}
\end{array}
$$

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$
\begin{array}{ll}
& \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \to (\forall x)[P(x) \to R(x)]) \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall y)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land (\neg Q(y) \lor R(y))) \land (P(a) \land \neg R(a))] \quad \text{[pág. ??]} \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}
\end{array}
$$

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$
\begin{array}{lll}
& \neg(\exists x)[P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall y)P(g(x,y),z) & \\
\equiv_{sat} & (\exists z)[\neg(\exists x)[P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall y)P(g(x,y),z)] & [1] \\
\equiv & (\exists z)[\neg(\exists x)[P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(1)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg(P(x,z) \lor (\forall y)Q(x,f(y)))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(9)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg P(x,z) \land \neg(\forall y)Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(6)] \\
\equiv & (\exists z)[(\forall x)[\neg P(x,z) \land (\exists y)\neg Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(8)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[(\neg P(x,z) \land (\exists y)\neg Q(x,f(y))) \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(12)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)[(\exists y)[\neg P(x,z) \land \neg Q(x,f(y))] \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(17)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)[(\neg P(x,z) \land \neg Q(x,f(y))) \lor (\forall w)P(g(x,w),z)] & [(14)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x,z) \land \neg Q(x,f(y))) \lor P(g(x,w),z)] & [(16)] \\
\equiv & (\exists z)(\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x,z) \lor P(g(x,w),z)) \land (\neg Q(x,f(y)) \lor P(g(x,w),z))] & [(20)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\exists y)(\forall w)[(\neg P(x,a) \lor P(g(x,w),a)) \land (\neg Q(x,f(y)) \lor P(g(x,w),a))] & [\text{Sko}] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall w)[(\neg P(x,a) \lor P(g(x,w),a)) \land (\neg Q(x,f(h(x))) \lor P(g(x,w),a))] & [\text{Sko}] \\
\equiv & \{\{\neg P(x,a), P(g(x,w),a))\}, \{\neg Q(x,f(h(x))), P(g(x,w),a))\}\} &
\end{array}
$$

Forma clausal de una fórmula: Ejemplos

- Ejemplo de cálculo de una forma clausal de

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)) & \\
\equiv & \neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists y)P(y) \to (\exists z)Q(z)) & [(2)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[P(x) \to Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \lor (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg(\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \lor (\exists z)Q(z)) & [(4)] \\
\equiv & \neg\neg((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land \neg(\exists z)Q(z) & [(6)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land \neg(\exists z)Q(z) & [(7)] \\
\equiv & ((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land (\exists y)P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z) & [(9)] \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)] \land (\forall z)\neg Q(z) & [(17)] \\
\equiv & (\exists y)[((\forall x)[\neg P(x) \lor Q(x)] \land P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(13)] \\
\equiv & (\exists y)[(\forall x)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y))] \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)[((\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y)) \land (\forall z)\neg Q(z)] & [(11)] \\
\equiv & (\exists y)(\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor Q(x)) \land P(y) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv_{sat} & (\forall x)(\forall z)[(\neg P(x) \lor Q(x) \land P(a)) \land \neg Q(z)] & [(15)] \\
\equiv & \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\} &
\end{array}
$$

Forma clausal de un conjunto de fórmulas

- **Equisatisfacibilidad de conjuntos de fórmulas:**
  - Def.: Los conjuntos de fórmulas S_1 y S_2 son equisatisfacible si:
    S_1 es satisfacible syss S_2 es satisfacible.
    Se representa por $S_1 \equiv_{sat} S_2$
- **Forma clausal de un conjunto de fórmulas**
  - Def.: Una forma clausal de un conjunto de fórmulas S es un conjunto de cláusulas equisatisfacible con S.
  - Prop.: Si $S_1, \dots, S_n$ son formas clausales de $F_1, \dots, F_n$, entonces $S_1 \cup \dots \cup S_n$ es una forma clausal de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
  - Ejemplo: Una forma clausal de
    $$\{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\exists x)P(x), \neg(\exists x)Q(x)\}$$
    es
    $$\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}.$$

Reducción de consecuencia a insatisfacibilidad de cláusulas

- **Reducción de consecuencia a insatisfacibilidad de cláusulas:**
  - Prop: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$. Si S es una forma clausal de $\neg G$, entonces son equivalentes
    1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$.
    2. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es insatisfacible.
    3. $S_1 \cup \ldots \cup S_n \cup S$ es insatisfacible.
  - Ejemplos:
    – Ejemplo 1:
    $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\exists x)P(x)\} \models (\exists x)Q(x)$
    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ es insatisfacible.
    – Ejemplo 2:
    $\{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)], (\forall x)[Q(x) \rightarrow R(x)]\} \models (\forall x)[P(x) \rightarrow R(x)]$
    syss $\{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es insatisfacible.

Bibliografía

- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 26–31.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 35–39 y 46–51.
- J.L. Fernández, A. Manjarrés y F.J. Díez *Lógica computacional.* (UNED, 2003) pp. 101–106.
- S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 62–67.
- A. Leitsch *The resolution calculus* (Springer–Verlag, 1997) pp. 11–22.
- R. Nieuwenhuis *Lógica de primer orden.* (U. Politénica de Cataluña, 2003) pp. 16–17
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 37–49
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 153–160.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 43–47.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 51–61.

Bibliografía complementaria

- **A. Leitsch *Resolution calculus and proof complexity* (Technische Universität Wien, Austria, 1994) pp. 8–12.**

Capítulo 9

Modelos de Herbrand

Tema 9: Modelos de Herbrand

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Reducción de la LPO básica a proposicional

- **Observación:**
  - En este tema sólo se consideran lenguajes de primer orden sin igualdad.
- **Reducción de la LPO básica a proposicional**
  - Def.: Una fórmula básica es una fórmula sin variables ni cuantificadores.
  - Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
    1. S es consistente en el sentido de la lógica de primer orden.
    2. S es consistente en el sentido de la lógica proposicional.

Reducción de la LPO básica a proposicional

- Ejemplos:
  - $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c)\}$
    es consistente en el sentido de la lógica de primer orden (con modelos $\mathcal{I}_4, \mathcal{I}_6, \mathcal{I}_8$).
  - $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$
    es inconsistente en el sentido de la lógica de primer orden.

	P^I	$P(a) \lor P(b)$	$\neg P(b) \lor P(c)$	$P(a) \to P(c)$	$\neg P(c)$
$\mathcal{I}_1$	$\emptyset$	0	1	1	1
$\mathcal{I}_2$	$\{c^I\}$	0	1	1	0
$\mathcal{I}_3$	$\{b^I\}$	1	0	1	1
$\mathcal{I}_4$	$\{b^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_5$	$\{a^I\}$	1	1	0	1
$\mathcal{I}_6$	$\{a^I, c^I\}$	1	1	1	0
$\mathcal{I}_7$	$\{a^I, b^I\}$	1	0	0	1
$\mathcal{I}_8$	$\{a^I, b^I, c^I\}$	1	1	1	0

Reducción de la LPO básica a proposicional

- Ejemplos:
  - $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c)\}$
    es consistente en el sentido proposicional (con modelos v_4, v_6, v_8).
  - $\{P(a) \lor P(b), \neg P(b) \lor P(c), P(a) \to P(c), \neg P(c)\}$
    es inconsistente en el sentido proposicional.

    Se consideran los cambios $P(a)/p, P(b)/q, P(c)/r$

	p	q	r	$p \lor q$	$\neg q \lor r$	$p \to r$	$\neg r$
v_1	0	0	0	0	1	1	1
v_2	0	0	1	0	1	1	0
v_3	0	1	0	1	0	1	1
v_4	0	1	1	1	1	1	0
v_5	1	0	0	1	1	0	1
v_6	1	0	1	1	1	1	0
v_7	1	1	0	1	0	0	1
v_8	1	1	1	1	1	1	0

Interpretaciones de Herbrand

- **Notación:**
  - L representa un lenguaje de primer orden sin igualdad.
  - $\mathcal{C}$ es el conjunto de constantes de L.
  - $\mathcal{F}$ es el conjunto de símbolos de función de L.
  - $\mathcal{R}$ es el conjunto de símbolos de relación de L.
  - $\mathcal{F}_n$ es el conjunto de símbolos de función n–aria de L.
  - $\mathcal{R}_n$ es el conjunto de símbolos de relación n–aria de L.
  - f/n indica que f es un símbolo de función n–aria de L.
  - P/n indica que f es un símbolo de relación n–aria de L.

Interpretaciones de Herbrand: Universo de Herbrand

- **Universo de Herbrand de L:**
  - Def.: El universo de Herbrand de L es el conjunto de los términos básicos de L. Se representa por UH(L).
  - Prop.: $\text{UH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} H_i(L)$, donde $H_i(L)$ es el nivel i del UH(L) definido por

$$H_0(L) = \begin{cases} \mathcal{C}, & \text{si } \mathcal{C} \neq \emptyset; \\ \{a\}, & \text{en caso contrario. } (a \text{ es una nueva constante}). \end{cases}$$
$$H_{i+1}(L) = H_i(L) \cup \{f(t_1, \dots, t_n) : f \in \mathcal{F}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in H_i(L)\}$$

  - Prop.: UH(L) es finito syss L no tiene símbolos de función.
  - Ejemplos:
    - Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{F} = \emptyset$, entonces
      $H_0(L) = \{a, b, c\}$
      $H_1(L) = \{a, b, c\}$
      $\vdots$
      $\text{UH}(L) = \{a, b, c\}$

Interpretaciones de Herbrand: Universo de Herbrand

- Ejemplos:
  - Si $\mathcal{C} = \emptyset$ y $\mathcal{F} = \{f/1\}$, entonces
    $$\begin{aligned} H_0(L) &= \{a\} \\ H_1(L) &= \{a, f(a)\} \\ H_2(L) &= \{a, f(a), f(f(a))\} \\ &\vdots \\ \mathrm{UH}(L) &= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$
  - Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/1, g/1\}$, entonces
    $$\begin{aligned} H_0(L) &= \{a, b\} \\ H_1(L) &= \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b)\} \\ H_2(L) &= \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), \; f(f(a)), f(f(b)), f(g(a)), f(g(b)), \\ &\qquad g(f(a)), g(f(b)), g(g(a)), g(g(b))\ \} \\ &\vdots \end{aligned}$$
  - Si $\mathcal{C} = \{a, b\}$ y $\mathcal{F} = \{f/2\}$, entonces
    $$\begin{aligned} H_0(L) &= \{a, b\} \\ H_1(L) &= \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)\} \\ H_2(L) &= \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(a, f(a, a)), f(a, f(a, b)), \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Interpretaciones de Herbrand: Base de Herbrand

- Base de Herbrand:
  - Def.: La base de Herbrand de L es el conjunto de los átomos básicos de L. Se representa por $\mathrm{BH}(L)$.
  - Prop.: $\mathrm{BH}(L) = \{P(t_1, \dots, t_n) : P \in \mathcal{R}_n \text{ y } t_1, \dots, t_n \in \mathrm{UH}(L)\}$.
  - Prop.: $\mathrm{BH}(L)$ es finita syss L no tiene símbolos de función.
  - Ejemplos:
    - Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\{\mathcal{R} = P/1\}$, entonces
      $$\begin{aligned} \mathrm{UH}(L) &= \{a, b, c\} \\ \mathrm{BH}(L) &= \{P(a), P(b), P(c)\} \end{aligned}$$
    - Si $\mathcal{C} = \{a\}$, $\mathcal{F} = \{f/1\}$ y $\mathcal{R} = \{P/1, Q/1, R/1\}$, entonces
      $$\begin{aligned} \mathrm{UH}(L) &= \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\ \mathrm{BH}(L) &= \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \dots\} \end{aligned}$$

Interpretaciones de Herbrand

- **Interpretaciones de Herbrand:**
  - Def.: Una interpretación $\mathcal{I} = (U, I)$ de L es de Herbrand si
    - U es el universo de Herbrand de L;
    - $I(c) = c$, para cada constante c de L;
    - $I(f) = f$, para cada símbolo de función f de L.
  - Prop.: Sea $\mathcal{I}$ una interpretación de Herbrand de L. Si t es un término básico de L, entonces $\mathcal{I}(t) = t$.
  - Prop.: Una interpretación de Herbrand queda determinada por un subconjunto de la base de Herbrand, el conjunto de átomos básicos verdaderos en esa interpretación.
  - Ejemplo: Si $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{F} = \emptyset$ y $\mathcal{R} = \{P/1\}$, entonces las interpretaciones de Herbrand de L son

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$I_n(P)$	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b,c\}$
IH_n	$\emptyset$	$\{P(c)\}$	$\{P(b)\}$	$\{P(b),P(c)\}$	$\{P(a)\}$	$\{P(a),P(c)\}$	$\{P(a),P(b)\}$	$\{P(a),P(b),P(c)\}$

Modelos de Herbrand

- **Modelos de Herbrand:**
  - Nota: Las definiciones de universo de Herbrand, base de Herbrand e interpretación de Herbrand definidas para un lenguaje se extienden a fórmulas y conjuntos de fórmulas considerando el lenguaje formado por los símbolos no lógicos que aparecen.
  - Def.: Un modelo de Herbrand de una fórmula F es una interpretación de Herbrand de F que es modelo de F.
  - Def.: Un modelo de Herbrand de un conjunto de fórmulas S es una interpretación de Herbrand de S que es modelo de S.
  - Ejemplo: Los modelos de Herbrand de $\{P(a) \vee P(b), \neg P(b) \vee P(c), P(a) \to P(c)\}$ son $\{P(b), P(c)\}$, $\{P(a), P(c)\}$ y $\{P(a), P(b), P(c)\}$ (ver página ??).
  - Ejemplo: Sea $S = \{(\forall x)(\forall y)[Q(b,x) \to P(a) \vee R(y)], P(b) \to \neg(\exists z)(\exists u)Q(z,u)\}$.
    Entonces, $\text{UH}(S) = \{a, b\}$
    $\text{BH}(S) = \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\}$

    Un modelo de Herbrand de S es $\{P(a)\}$.

Interpretación de Herbrand correspondiente

- **Interpretación de Herbrand correspondiente a una interpretación:**
  - Sea $S = \{\{\neg Q(b,x), P(a), R(y)\}, \{\neg P(b), \neg Q(z,u)\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1, b^I = 2, P^I = \{1\}, Q^I = \{(1,1),(2,2)\}, R^I = \{2\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

    Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}^* & = (\mathrm{UH}(S), I^*) \\
\mathrm{UH}(S) & = \{a, b\} \\
\mathrm{BH}(S) & = \{P(a), P(b), Q(a,a), Q(a,b), Q(b.a), Q(b,b), R(a), R(b)\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(b)) & = P^I(b^I) = P^I(2) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(a,a) & = Q^I(a^I, a^I) = Q^I(1,1) = \mathrm{V} \\
I^*(Q(a,b) & = Q^I(a^I, b^I) = Q^I(1,2) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(b,a) & = Q^I(b^I, a^I) = Q^I(2,1) = \mathrm{F} \\
I^*(Q(b,b) & = Q^I(b^I, b^I) = Q^I(2,2) = \mathrm{V} \\
I^*(R(a)) & = R^I(a^I) = R^I(1) = \mathrm{F} \\
I^*(R(b)) & = R^I(b^I) = R^I(2) = \mathrm{V}
\end{array}
$$

    $I^* = \{P(a), Q(a,a), Q(b,b), R(b)\}$

    $\mathcal{I}^* \models S$.

Interpretación de Herbrand correspondiente

- **Interpretación de Herbrand correspondiente a una interpretación:**
  - Sea S el conjunto de cláusulas $\{\{P(a)\}, \{Q(y, f(a))\}\}$ e $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$ con $a^I = 1, f^I = \{(1,2),(2,1)\}, P^I = \{1\}, Q^I = \{(1,2),(2,2)\}$. Entonces, $\mathcal{I} \models S$.

    Cálculo de la interpretación de Herbrand $\mathcal{I}^*$ correspondiente a $\mathcal{I}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{I}^* & = (\mathrm{UH}(S), I^*) \\
\mathrm{UH}(S) & = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\} = \{f^i(a) : i \in \mathbb{N}\} \\
\mathrm{BH}(S) & = \{P(f^n(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^m(a)) : n, m \in \mathbb{N}\} \\
I^*(P(a)) & = P^I(a^I) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(f(a))) & = P^I(f^I(a^I)) = P^I(f^I(1)) = P^I(2) = \mathrm{F} \\
I^*(P(f(f(a)))) & = P^I(f^I(f^{(}a^I))) = P^I(1) = \mathrm{V} \\
I^*(P(f^n(a))) & = \begin{cases} \mathrm{V}, & \text{si } n \text{ es par;} \\ \mathrm{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\
I^*(Q(f^n(a), f^m(a))) & = \begin{cases} \mathrm{V}, & \text{si } m \text{ es impar;} \\ \mathrm{F}, & \text{en caso contrario.} \end{cases}
\end{array}
$$

    $I^* = \{P(f^{2n}(a)) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{Q(f^n(a), f^{2m+1}(a)) : n, m \in \mathbb{N}\}$

    $\mathcal{I}^* \models S$.

Consistencia mediante modelos de Herbrand

- **Consistencia mediante modelos de Herbrand:**
  - Prop.: Sea S un conjunto de fórmulas básicas. Son equivalentes:
    1. S es consistente.
    2. S tiene un modelo de Herbrand.
  - Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Si $\mathcal{I}^*$ es una interpretación de Herbrand correspondiente a un modelo $\mathcal{I}$ de S, entonces $\mathcal{I}^*$ es un modelo de S.
  - Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
    1. S es consistente.
    2. S tiene un modelo de Herbrand.
  - Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
    1. S es inconsistente.
    2. S no tiene ningún modelo de Herbrand.
  - Prop.: Existen conjuntos de fórmulas consistentes sin modelos de Herbrand.

Consistencia mediante modelos de Herbrand

- **Ejemplo de conjunto consistente sin modelos de Herbrand:**
  - Sea $S = \{(\exists x)P(x), \neg P(a)\}$. Entonces,
    - S es consistente.

      $\mathcal{I} \models S$ con $\mathcal{I} = (\{1,2\}, I)$, $a^I = 1$ y $P^I = \{2\}$.
    - S no tiene modelos de Herbrand

      $\mathrm{UH}(S) = \{a\}$

      $\mathrm{BH}(S) = \{P(a)\}$

      Las interpretaciones de Herbrand de S son $\emptyset$ y $\{P(a)\}$.

      $\emptyset \not\models S$

      $\{P(a)\} \not\models S$

Extensiones de Herbrand

- Instancias básicas de una cláusula
  - Def.: Una sustitución σ (de L) es una aplicación $\sigma : \mathrm{Var} \to \mathrm{Térm}(L)$.
  - Def.: Sea $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ una cláusula de L y σ una sustitución de L. Entonces, $C\sigma = \{L_1\sigma, \dots, L_n\sigma\}$ es una instancia de C.
  - Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
    $$C[x/a, y/f(a)] = \{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$$
  - Def.: $C\sigma$ es una instancia básica de C si todos los literales de $C\sigma$ son básicos.
  - Ejemplo: Sea $C = \{P(x, a), \neg P(x, f(y))\}$.
    $\{P(f(a), a), \neg P(f(a), f(f(a)))\}$ es una instancia básica de C.
    $\{P(f(a), a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de C.
    $\{P(x, a), \neg P(f(f(a)), f(a))\}$ no es una instancia básica de C.

Extensiones de Herbrand

- Extensiones de Herbrand
  - Def.: La extensión de Herbrand de un conjunto de cláusulas S es el conjunto de fórmulas
    $$\mathrm{EH}(S) = \{C\sigma : C \in S \text{ y, para toda variable } x \text{ en } C,\ \sigma(x) \in \mathrm{UH}(S)\}.$$
  - Prop.: $\mathrm{EH}(L) = \bigcup_{i \geq 0} \mathrm{EH}_i(L)$, donde $\mathrm{EH}_i(L)$ es el nivel i de la $\mathrm{EH}(L)$ definido por
    $$\mathrm{EH}_i(S) = \{C\sigma : C \in S \text{ y, para toda variable } x \text{ en } C,\ \sigma(x) \in \mathrm{UH}_i(S)\}.$$
  - Ejemplo: Sea $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ (p. 8.17). Entonces,
    $$\begin{aligned} \mathrm{EH}_0(S) &= \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\} \\ \mathrm{EH}_1(S) &= \mathrm{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\} \\ \mathrm{EH}_2(S) &= \mathrm{EH}_1(S) \cup \{\{P(f(f(a)))\}, \{\neg P(f(f(f(a))))\}\} \end{aligned}$$
  - Ejemplo: Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. 8.21).
    Entonces, $\mathrm{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$.
  - Ejemplo: Sea $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ (p. 8.21).
    Entonces, $\mathrm{EH}(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

Teorema de Herbrand

- Teorema de Herbrand:
  - Teorema de Herbrand: Sea S un conjunto de cláusulas. Son equivalentes:
    1. S es consistente.
    2. EH(S) es consistente (en el sentido proposicional).
  - Prop.: Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces, son equivalentes
    1. S es inconsistente.
    2. EH(S) tiene un subconjunto finito inconsistente (en el sentido proposicional).
    3. Para algún i, $\mathrm{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional).

Teorema de Herbrand

- Semidecisón de la consistencia mediante el teorema de Herbrand:
  - Entrada: Un conjunto de cláusulas S.
  - Procedimiento:
    1. Hacer $i := 0$.
    2. Calcular $\mathrm{EH}_i(S)$.
    3. Si $\mathrm{EH}_i(S)$ es inconsistente (en el sentido proposicional), parar e indicar que S es inconsistente.
    4. Si $\mathrm{EH}_i(S)$ es consistente (en el sentido proposicional), hacer $i := i + 1$ y volver al paso 2.

Teorema de Herbrand

- **Ejemplo:** $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(z)\}\}$ (p. ??) es inconsistente.

  $\mathrm{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg Q(a)\}\}$ es inconsistente.

1	$\{\neg P(a), Q(a)\}$	
2	$\{P(a)\}$	
3	$\{\neg Q(a)\}$	
4	$\{Q(a)\}$	Res $1, 2$
5	$\square$	Res $3, 4$

- **Ejemplo:** $S = \{\{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(y), R(y)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$ es inconsistente.

  $\mathrm{EH}_0(S) = \{\{\neg P(a), Q(a)\}, \{\neg Q(a), R(a)\}, \{P(a)\}, \{\neg R(a)\}\}$.

1	$\{\neg P(a), Q(a)\}$	
2	$\{\neg Q(a), R(a)\}$	
3	$\{P(a)\}$	
4	$\{\neg R(a)\}$	
5	$\{Q(a)\}$	Res $1, 3$
6	$\{R(a)\}$	Res $5, 2$
7	$\square$	Res $6, 4$

Teorema de Herbrand

- **Ejemplo:** $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ es inconsistente (p. ??).
  - $\mathrm{EH}_0(S) = \{\{P(a)\}, \{\neg P(f(a))\}\}$ es consistente

    $\mathcal{I} = \{P(a)\} \models \mathrm{EH}_0(S)$
  - $\mathrm{EH}_1(S) = \mathrm{EH}_0(S) \cup \{\{P(f(a))\}, \{\neg P(f(f(a)))\}\}$ es inconsistente.

1	$\{P(f(a))\}$	
2	$\{\neg P(f(a))\}$	
3	$\square$	Res $1, 2$

- **Ejemplo:** $S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$ es inconsistente.
  - $S' = \{\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}\} \subset \mathrm{EH}(S)$ es inconsistente.

1	$\{\neg P(g(b)), Q(f(g(b)), g(b))\}$	
2	$\{P(g(b))\}$	
3	$\{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}$	
4	$\{Q(f(g(b)), g(b))\}$	Res $1, 2$
5	$\square$	Res $3, 3$

Bibliografía

- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 31–34.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 51–62.
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 59–74.
- E. Paniagua, J.L. Sánchez y F. Martín *Lógica computacional* (Thomson, 2003) pp. 160–169.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 47–50.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 70–78.

Bibliografía complementaria

- A. Leitsch *Resolution calculus and proof complexity* (Technische Universität Wien, Austria, 1994) pp. 12–15.

Capítulo 10

Resolución en lógica de primer orden

Tema 10: Resolución

José A. Alonso Jiménez
Andrés Cordón Franco

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Resolución no restringida

- **Resolvente no restringida**
  - **Def.: La cláusula C es una resolvente no restringida de las cláusulas C_1 y C_2 si existen dos sustituciones σ_1 y σ_2 y un literal $L \in C_1\sigma_1$ tales que $L^c \in C_2\sigma_2$ y**

    $$C = (C_1\sigma_1 \setminus \{L\sigma_1\}) \cup (C_2\sigma_2 \setminus \{L^c\sigma_2\}).$$

  - **Sean** $$\begin{array}{ll} C_1 & = \{\neg R(x, f(y)), P(x, f(z)), Q(f(z))\}, \\ C_2 & = \{R(z, f(z)), R(f(y), u), Q(z)\}, \\ \sigma_1 & = [x/f(y), y/f(y), z/y], \\ C_1\sigma_1 & = \{\neg R(f(y), f(f(y))), P(f(f(y)), f(y)), Q(f(y))\}, \\ \sigma_2 & = [z/f(y), u/f(f(y))], \\ C_2\sigma_2 & = \{R(f(y), f(f(y))), R(f(y), f(f(y)), Q(f(y)))\}, \\ L & = \neg R(f(y), f(f(y))) \end{array}$$

    Entonces, una resolvente no restringida de C_1 y C_2 es

    $$C = \{P(f(f(y)), f(y)), Q(f(y))\}$$

Resolución no restringida

- **Ejemplos de refutación por resolución no restringida:**
  - Refutación no restringida de

$$S = \{\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}, \{P(g(b))\}, \{\neg Q(y, z)\}\}$$

1	$\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}$	Hipótesis
2	$\{P(g(b))\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(y, z)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(g(b)), g(b))\}$	Resolvente de 1 y 2
5	$\Box$	Resolvente de 3 y 4

Resolución no restringida

- Refutación no restringida de

$$\{\{R(c)\}, \{R(f(c))\}, \{\neg R(x), P(x)\}, \{\neg P(x), Q(x)\}, \{\neg Q(c), \neg Q(f(c)), \neg R(c)\}\}$$

1	$\{R(c)\}$	Hipótesis
2	$\{R(f(c))\}$	Hipótesis
3	$\{\neg R(x), P(x)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
5	$\{\neg Q(c), \neg Q(f(c)), \neg R(c)\}$	Hipótesis
6	$\{\neg R(x), Q(x)\}$	Resolvente de 3 y 4
7	$\{Q(c)\}$	Resolvente de 1 y 6
8	$\{Q(f(c))\}$	Resolvente de 2 y 6
9	$\{\neg Q(f(c)), \neg R(c)\}$	Resolvente de 5 y 7
10	$\{\neg R(c)\}$	Resolvente de 8 y 9
10	$\Box$	Resolvente de 1 y 10

Resolución no restringida

- Definiciones
  - Sea S un conjunto de cláusulas.
  - La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución no restringida de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
    - $C_i \in S$;
    - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente no restringida de C_j y C_k
  - La cláusula C es demostrable por resolución no restringida a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.
  - Una refutación por resolución no restringida de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
  - Se dice que S es refutable por resolución no restringida si existe una refutación por resolución a partir de S.

Resolución no restringida

- Demostraciones por resolución
  - Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$. Una demostración por resolución no restringida de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución no restringida de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
  - Def.: La fórmula F es demostrable por resolución no restringida a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución no restringida de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$.
    Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{ResNoR} F$.
  - Ejemplo: Demostración por resolución no restringida de $(\exists x)P(g(x))$ a partir de $\{(\forall x)[P(x) \to Q(f(x), x)], \neg(\exists y)(\exists z)Q(y, z)\}$

1	$\{\neg P(x), Q(f(x), x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y, z)\}$	Hipótesis
3	$\{P(g(b))\}$,	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(b(b)), g(b))\}$	Resolvente de 1 y 3
5	$\square$	Resolvente de 2 y 4

Adecuación y completitud de la resolución

- **Propiedades:**
  - Si C es una resolvente restringida de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
  - Si $\square \in S$, entonces S es inconsistente.
  - Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución no restringida, entonces S es inconsistente.
  - Teor.: El cálculo de resolución no restringida es adecuado y completo; es decir,

    Adecuado: $S \vdash_{ResNoR} F \quad \Longrightarrow \quad S \models F$

    Completo: $S \models F \quad \Longrightarrow \quad S \vdash_{ResNoR} F$

Unificación: Unificadores

- **Unificador:**
  - Def.: La sustitución σ es un unificador de los términos t_1 y t_2 si $t_1\sigma = t_2\sigma$.
  - Def.: Los términos t_1 y t_2 son unificables si tienen algún unificador.
  - Def.: t es una instancia común de t_1 y t_2 si existe una sustitución σ tal que $t = t_1\sigma = t_2\sigma$.
  - Ejemplos:

t_1	t_2	Unificador	Instancia común
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(z), y/z]$	$f(g(z), g(z))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(y), z/y]$	$f(g(y), g(y))$
$f(x, g(z))$	$f(g(y), x)$	$[x/g(a), y/a]$	$f(g(a), g(a))$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[x/a, y/a]$	$f(a, a)$
$f(x, y)$	$f(y, x)$	$[y/x]$	$f(x, x)$
$f(x, y)$	$g(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x, x)$	$f(a, b)$	No tiene	No tiene
$f(x)$	$f(g(x))$	No tiene	No tiene

  - Nota: Las anteriores definiciones se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Unificación: Composición de sustituciones

- Composición de sustituciones:
  - Def.: La composición de las sustituciones σ_1 y σ_2 es la sustitución $\sigma_1\sigma_2$ definida por $x(\sigma_1\sigma_2) = (x\sigma_1)\sigma_2$, para toda variable x.
  - Ejemplo: Si $\sigma_1 = [x/f(z,a), y/w]$ y $\sigma_2 = [x/b, z/g(w)]$, entonces
    - $x\sigma_1\sigma_2 = (x\sigma_1)\sigma_2 = f(z,a)\sigma_2 = f(z\sigma_2, a\sigma_2) = f(g(w), a)$
    - $y\sigma_1\sigma_2 = (y\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$
    - $z\sigma_1\sigma_2 = (z\sigma_1)\sigma_2 = z\sigma_2 = g(w)$
    - $w\sigma_1\sigma_2 = (w\sigma_1)\sigma_2 = w\sigma_2 = w$

    Por tanto, $\sigma_1\sigma_2 = [x/f(g(w),a), y/w, z/g(w)]$.
  - Def.: La substitución identidad es la sustitución ϵ tal que, para todo x, $x\epsilon = x$.
  - Propiedades:
    1. Asociativa: $\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$
    2. Neutro: $\sigma\epsilon = \epsilon\sigma = \sigma$.

Unificación: Comparación de sustituciones

- Comparación de sustituciones:
  - Def.: La sustitución σ_1 es más general que la σ_2 si existe una sustitución σ_3 tal que $\sigma_2 = \sigma_1\sigma_3$, Se representa por $\sigma_2 \leq \sigma_1$.
  - Def.: Las sustituciones σ_1 y σ_2 son equivalentes si $\sigma_1 \leq \sigma_2$ y $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Se representa por $\sigma_1 \equiv \sigma_2$.
  - Ejemplos: Sean $\sigma_1 = [x/g(z), y/z], \sigma_2 = [x/g(y), z/y]$ y $\sigma_3 = [x/g(a), y/a]$. Entonces,
    1. $\sigma_1 = \sigma_2[y/z]$
    2. $\sigma_2 = \sigma_1[z/y]$
    3. $\sigma_3 = \sigma_1[z/a]$
    4. $\sigma_1 \equiv \sigma_2$
    5. $\sigma_3 \leq \sigma_1$
  - Ejemplo: $[x/a, y/a] \leq [y/x]$, ya que $[x/a, y/a] = [y/x][x/a, y/a]$.

Unificación: Unificador de máxima generalidad

- **Unificador de máxima generalidad:**
  - Def.: La sustitución σ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de los términos t_1 y t_2 si
    - σ es un unificador de t_1 y t_2.
    - σ es más general que cualquier unificador de t_1 y t_2.
  - Ejemplos:
    1. $[x/g(z), y/z]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
    2. $[x/g(y), z/y]$ es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
    3. $[x/g(a), y/a]$ no es un UMG de $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$.
  - Nota: Las anterior definición se extienden a conjuntos de términos y de literales.

Unificación: Algoritmo de unificación

- **Notación de lista:**
  - $(a_1, \dots, a_n)$ representa una lista cuyos elementos son $a_1, \dots, a_n$.
  - $(a|R)$ representa una lista cuyo primer elemento es a y resto es R.
  - $()$ representa la lista vacía.
- **Unificadores de listas de términos:**
  - Def.: σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si $s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma$.
  - Def.: $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ son unificables si tienen algún unificador.
  - Def.: σ es un unificador de máxima generalidad (UMG) de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ si σ es un unificador de $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$ más general que cualquier otro.
- **Aplicación de una sustitución a una lista de ecuaciones:**
  - $(s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)\sigma = (s_1\sigma = t_1\sigma, \dots, s_n\sigma = t_n\sigma)$.
- **Algoritmo de unificación de listas de términos:**
  - Entrada: Una lista de ecuaciones $L = (s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n)$ y una sustitución σ.
  - Salida: Un UMG de las listas $(s_1 \dots, s_n)$ y $(t_1 \dots, t_n)$, si son unificables;
"No unificables", en caso contrario.

Unificación: Algoritmo de unificación

- Procedimiento unif(L, σ):
  1. Si $L = ()$, entonces unif$(L, \sigma) = \sigma$.
  2. Si $L = (t = t|L')$, entonces unif$(L, \sigma) =$ unif(L', σ).
  3. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces
     unif$(L, \sigma) =$ unif$((t_1 = t'_1, \dots, t_m = t'_m|L'), \sigma)$.
  4. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x no aparece en t, entonces
     unif$(L, \sigma) =$ unif$(L'[x/t], \sigma[x/t])$.
  5. Si $L = (x = t|L')$ (ó $L = (t = x|L')$) y x aparece en t, entonces
     unif$(L, \sigma) =$ "No unificables".
  6. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = g(t'_1 \dots, t'_m)|L')$, entonces
     unif$(L, \sigma) =$ "No unificables".
  7. Si $L = (f(t_1, \dots, t_m) = f(t'_1 \dots, t'_p)|L')$ y $m \neq p$, entonces
     unif$(L, \sigma) =$ "No unificables".

Unificación: Algoritmo de unificación

- Algoritmo de unificación de dos términos:
  - Entrada: Dos términos t_1 y t_2.
  - Salida: Un UMG de t_1 y t_2, si son unificables;
    "No unificables", en caso contrario.
  - Procedimiento: unif$((t_1 = t_2), \epsilon)$.
  - Ejemplo 1: Unificar $f(x, g(z))$ y $f(g(y), x)$:

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{unif}((f(x,g(z)) = f(g(y),x)), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = g(y), g(z) = x), \epsilon) & \text{por 3} \\
= & \text{unif}((g(z) = x)[x/g(y)], \epsilon[x/g(y)]) & \text{por 4} \\
= & \text{unif}((g(z) = g(y)), [x/g(y)]) & \\
= & \text{unif}((z = y), [x/g(y)]) & \text{por 3} \\
= & \text{unif}((), [x/g(y)][z/y]) & \text{por 4} \\
= & \text{unif}((), [x/g(y), z/y]) & \\
= & [x/g(y), z/y] & \text{por 1}
\end{array}
$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- Ejemplo 2: Unificar $f(x, b)$ y $f(a, y)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,b) = f(a,y), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = a, b = y), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((b = y)[x/a], \epsilon[x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((b = y), [x/a]) & \\
= & \text{unif}((), [x/a][y/b]) & \text{por } 4 \\
= & [x/a, y/b]) & \text{por } 1
\end{array}
$$

- Ejemplo 3: Unificar $f(x, x)$ y $f(a, b)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,x) = f(a,b), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = a, x = b), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((x = b)[x/a], \epsilon[x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((a = b), [x/a]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por } 6
\end{array}
$$

- Ejemplo 4: Unificar $f(x, g(y))$ y $f(y, x)$:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((f(x,g(y)) = f(y,x)), \epsilon) & \\
= & \text{unif}((x = y, g(y) = x), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((g(y) = x)[x/y], \epsilon[x/y]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((g(y) = y), [x/y]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por } 5
\end{array}
$$

Unificación: Algoritmo de unificación

- Ejemplo 5: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, z)$

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,z))\epsilon) & \\
= & \text{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = z), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((a = x, h(w) = z)[w/f(x,y)], \epsilon[w/f(x,y)]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((a = x, h(f(x,y)) = z), [w/f(x,y)]) & \\
= & \text{unif}((h(f(x,y)) = z)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((h(f(a,y)) = z), [w/f(a,y), x/a]) & \\
= & \text{unif}((), [w/f(a,y), x/a][z/h(f(a,y))) & \text{por } 4 \\
= & [w/f(a,y), x/a, z/h(f(a,y))) & \text{por } 1
\end{array}
$$

- Ejemplo 6: Unificar $j(w, a, h(w))$ y $j(f(x, y), x, y)$

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{unif}((j(w,a,h(w)) = j(f(x,y),x,y))\epsilon) & \\
= & \text{unif}((w = f(x,y), a = x, h(w) = y), \epsilon) & \text{por } 3 \\
= & \text{unif}((a = x, h(w) = y)[w/f(x,y)], \epsilon[w/f(x,y)]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((a = x, h(f(x,y)) = y), [w/f(x,y)]) & \\
= & \text{unif}((h(f(x,y)) = y)[x/a], [w/f(x,y)][x/a]) & \text{por } 4 \\
= & \text{unif}((h(f(a,y)) = y), [w/f(a,y), x/a]) & \\
= & \text{“No unificable”} & \text{por } 5
\end{array}
$$

Resolución: Separación de variables

- Separación de variables
  - Def.: La sustitución $[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ es un renombramiento si todos los t_i son variables.
  - Prop.: Si θ es un renombramiento, entonces $C \equiv C\theta$.
  - Def.: Las cláusulas C_1 y C_2 están separadas sin no tienen ninguna variable común.
  - Def.: Una separación de las variables de C_1 y C_2 es un par de renombramientos θ_1, θ_2 tales que $C_1\theta_1$ y $C_2\theta_2$ están separadas.
  - Ejemplo: Una separación de variables de $C_1 = \{P(x), Q(x,y)\}$ y $C_2 = \{R(f(x,y))\}$ es $(\theta_1 = [x/x_1, y/y_1], \theta_2 = [x/x_2, y/y_2]$.

Resolución: Resolvente binaria

- Resolución binaria:
  - Def.: La cláusula C es una resolvente binaria de las cláusulas C_1 y C_2 si existen una separación de variables (θ_1, θ_2) de C_1 y C_2, un literal $L_1 \in C_1$, un literal $L_2 \in C_2$ y un UMG σ de $L_1\theta_1$ y $L_2^c\theta_2$ tales que

    $$C = (C_1\theta_1\sigma \setminus \{L_1\theta_1\sigma_1\}) \cup (C_2\theta_2\sigma \setminus \{L_2\theta_2\sigma\}).$$

  - Ejemplo: Sean
    $$\begin{aligned} C_1 &= \{P(a,y), R(y)\}, \\ C_2 &= \{\neg P(x, f(x)), Q(g(x))\}, \\ \theta_1 &= \epsilon, \\ \theta_2 &= \epsilon, \\ L_1 &= P(a,y), \\ L_2 &= \neg P(x, f(x)), \\ \sigma &= [x/a, y/f(a)] \end{aligned}$$
    Entonces, $C = \{R(f(a)), Q(g(a))\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2.

Resolución: Resolvente binaria

- Ejemplo (Necesidad de separar variables):
  Sean $C_1 = \{P(x), Q(x)\}$,
  $C_2 = \{\neg P(f(x)), R(x)\}$,
  $\theta_1 = [x/x_1]$,
  $\theta_2 = [x/x_2]$,
  $L_1 = P(x)$,
  $L_2 = P(f(x))$,
  $\sigma = [x_1/f(x_2)]$
  Entonces, $C = \{Q(f(x_2)), R(x_2)\}$ es una resolvente binaria de C_1 y C_2.
  Notas sobre la necesidad de separar variables:
  - $P(x)$ y $P(f(x))$ no son unificables.
  - $P(x_1)$ y $P(f(x_2))$ son unificables siendo $\sigma = [x_1/f(x_2)]$ un UMG.

Resolución: Factorización

- Factorización:
  - Def.: La cláusula C es un factor de la cláusula D si existen dos literales L_1 y L_2 en D que son unificables y $C = D\sigma \setminus \{L_2\sigma\}$ donde σ es un UMG de L_1 y L_2.
  - Ejemplo: Sean $D = \{P(x, y), P(y, x), Q(a)\}$
    $L_1 = P(x, y)$
    $L_2 = P(y, x)$
    $\sigma = [y/x]$
    Entonces, $C = \{P(x, x), Q(a)\}$ es un factor de D.

Resolución

- Ejemplos de refutación por resolución:
  - Refutación de $S = \{\{\neg P(x, f(x, y))\}, \{P(a, z), \neg Q(z, v)\}, \{Q(u, a)\}\}$

1	$\{\neg P(x, f(x, y))\}$	Hipótesis
2	$\{P(a, z), \neg Q(z, v)\}$	Hipótesis
3	$\{Q(u, a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg Q(f(a, y), v)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $\sigma = [x/a, z/f(a, y)]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $\sigma = [u/f(a, y), v/a]$

  - Refutación de $S = \{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$

1	$\{P(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(f(x))\}$	Hipótesis
3	$\square$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_1 = \epsilon, \theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

  - Refutación de $S = \{\{P(x, y), P(y, x)\}, \{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}\}$

1	$\{P(x, y), P(y, x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(u, v), \neg P(v, u)\}$	Hipótesis
3	$\{P(x, x)\}$	Factor de 1 con $[y/x]$
4	$\{\neg P(u, u)\}$	Factor de 2 con $[v/u]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $[x/u]$

Resolución

- Definiciones
  - Sea S un conjunto de cláusulas.
  - La sucesión $(C_1, \dots, C_n)$ es una demostración por resolución de la cláusula C a partir de S si $C = C_n$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se verifica una de las siguientes condiciones:
    - $C_i \in S$;
    - existen $j, k < i$ tales que C_i es una resolvente de C_j y C_k
    - existe $j < i$ tal que C_i es un factor de C_j
  - La cláusula C es demostrable por resolución a partir de S si existe una demostración por resolución de C a partir de S.
  - Una refutación por resolución de S es una demostración por resolución de la cláusula vacía a partir de S.
  - Se dice que S es refutable por resolución si existe una refutación por resolución a partir de S.

Resolución

- Demostraciones por resolución
  - Def.: Sean $S_1, \dots, S_n$ formas clausales de las fórmulas $F_1, \dots, F_n$ y S una forma clausal de $\neg F$. Una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una refutación por resolución de $S_1 \cup \dots \cup S_n \cup S$.
  - Def.: La fórmula F es demostrable por resolución no restringida a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$ si existe una demostración por resolución de F a partir de $\{F_1, \dots, F_n\}$. Se representa por $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_{Res} F$.
  - Ejemplo: (tema 8 p. 21) $S = \{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\exists x)P(x)\} \vdash_{Res} (\exists x)Q(x)$

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{P(a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg Q(z)\}$	Hipótesis
4	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4 con $[z/a]$

Resolución

- Ejemplo: (tema 8 p. 21)

$S = \{(\forall x)[P(x) \to Q(x)], (\forall x)[Q(x) \to R(x)] \vdash_{Res} (\forall x)[P(x) \to R(x)]\}$

1	$\{\neg P(x), Q(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg Q(y), R(y)\}$	Hipótesis
3	$\{P(a)\}$	Hipótesis
4	$\{\neg R(a)\}$	Hipótesis
5	$\{Q(a)\}$	Resolvente de 1 y 2 con $[x/a]$
6	$\{R(a)\}$	Resolvente de 2 y 5 con $[y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 6 y 4 con

- Ejemplo: (tema 6 p. 55) $\vdash_{Res} (\exists x)[P(x) \to (\forall y)P(y)]$

1	$\{P(x)\}$	Hipótesis
2	$\{\neg P(f(x)\}$	Hipótesis
3	$\square$	Resolvente de 1 y 2 con $\theta_2 = [x/x'], \sigma = [x/f(x')]$

Resolución

- Ejemplo: $\vdash_{Res} (\forall x)(\exists y)\neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y))$
  - Forma clausal:

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(\forall x)(\exists y)\neg(P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((P(y,x) \rightarrow \neg P(y,y)) \wedge (\neg P(y,y) \rightarrow P(y,x))) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (\neg\neg P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & \neg(\forall x)(\exists y)\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)\neg\neg((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv & (\exists x)(\forall y)((\neg P(y,x) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,x))) \\
\equiv_{sat} & (\forall y)((\neg P(y,a) \vee \neg P(y,y)) \wedge (P(y,y) \vee P(y,a))) \\
\equiv & \{\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}, \{P(y,y), P(y,a)\}\}
\end{array}
$$

  - Refutación:

1	$\{\neg P(y,a), \neg P(y,y)\}$	Hipótesis
2	$\{P(y,y), P(y,a)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg P(a,a)\}$	Factor de 1 con $[y/a]$
4	$\{\neg P(a,a)\}$	Factor de 2 con $[y/a]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Resolución

- Ejemplo (Paradoja del barbero de Russell): En una isla pequeña hay sólo un barbero. El gobernador de la isla ha publicado la siguiente norma: “El barbero afeita a todas las personas que no se afeitan a sí misma y sólo a dichas personas”. Demostrar que la norma es inconsistente.
  - Representación:

$$(\forall x)[\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)]$$

  - Forma clausal:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x)[\text{afeita}(b,x) \leftrightarrow \neg\text{afeita}(x,x)] \\
\equiv & (\forall x)[(\text{afeita}(b,x) \rightarrow \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\neg\text{afeita}(x,x) \rightarrow \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg\text{afeita}(b,x) \vee \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\neg\neg\text{afeita}(x,x) \vee \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv & (\forall x)[(\neg\text{afeita}(b,x) \vee \neg\text{afeita}(x,x)) \wedge (\text{afeita}(x,x) \vee \text{afeita}(b,x))] \\
\equiv & \{\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}, \{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}\}
\end{array}
$$

  - Refutación:

1	$\{\neg\text{afeita}(b,x), \neg\text{afeita}(x,x)\}$	Hipótesis
2	$\{\text{afeita}(x,x), \text{afeita}(b,x)\}$	Hipótesis
3	$\{\neg\text{afeita}(b,b)\}$	Factor de 1 con $[x/b]$
4	$\{\neg\text{afeita}(b,b)\}$	Factor de 2 con $[x/b]$
5	$\square$	Resolvente de 3 y 4

Adecuación y completitud de la resolución

- Propiedades:
  - Si C es una resolvente de C_1 y C_2, entonces $\{C_1, C_2\} \models C$.
  - Si C es un factor de C entonces $C \models D$.
  - Si $\Box \in S$, entonces S es inconsistente.
  - Si el conjunto de cláusulas S es refutable por resolución, entonces S es inconsistente.
  - Teor.: El cálculo de resolución es adecuado y completo; es decir,

    Adecuado: $S \vdash_{Res} F \quad \Longrightarrow \quad S \models F$

    Completo: $S \models F \quad \Longrightarrow \quad S \vdash_{Res} F$

Bibliografía

- M.L. Bonet *Apuntes de LPO.* (Univ. Politécnica de Cataluña, 2003) pp. 34–40.
- C.L. Chang y R.C.T. Lee *Symbolic logic and mechanical theorem proving* (Academic Press, 1973) pp. 70–99.
- J.I. García, P.A. García y J.M. Urbano *Fundamentos lógicos de la programación.* (Universidad de Granada, 2002) pp. 45–66
- M. Genesereth *Computational Logic (Chapter 9: Relational Resolution)* (Stanford University, 2003)
- S. Hölldobler *Computational logic.* (U. de Dresden, 2004) pp. 71–74.
- M. Ojeda e I. Pérez *Lógica para la computación (Vol. 2: Lógica de Primer Orden)* (Ágora, 1997) pp. 138–164.
- L. Paulson *Logic and proof* (U. Cambridge, 2002) pp. 50–61.
- U. Schöning *Logic for computer scientists* (Birkäuser, 1989) pp. 79–96.